Name, Vorname: ... **Stg.: ...** **Matr.-Nr.: ...**

Technische Universität Ilmenau
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
FG Nachrichtentechnik

Signale- und Systeme 1 & 2 (II)
Signal- und Systemtheorie (MT-AVT)

22.07.2006

Bearbeitungszeit: 180 min — Maximalpunktzahl: 46 (+2)

Anmerkungen: Die **fett** hervorgehobenen Teilaufgaben lassen sich unabhängig von den zugehörigen vorangegangenen Teilaufgaben lösen. Um auch auf grafischem Weg korrekte Lösungen zu erhalten, sollte beim Erstellen von Skizzen (z.B. in Bezug auf die Achseinteilung und -beschriftung) mit Sorgfalt gearbeitet werden.

(6 Pkt.) 1. Von der Übertragungsfunktion $G(f) = \mathrm{Re}\{G(f)\} + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{G(f)\}$ eines Tiefpasses mit *kausaler*, reeller Impulsantwort sei der Realteil $G_{\mathrm{Re}}(f) = \mathrm{Re}\{G(f)\}$ bekannt

$$G_{\mathrm{Re}}(f) = \mathrm{si}(\pi f T).$$

(a) Was versteht man unter einem „kausalen System"?

(b) Welche Eigenschaften erfüllen die Signale $g_1(t)$ und $g_2(t)$ entsprechend der folgenden Korrespondenz, wenn $g(t)$ reell ist.

$$\begin{array}{cccc} G(f) = & G_{\mathrm{Re}}(f) & + & \underbrace{\mathrm{j}\;G_{\mathrm{Im}}(f)} \\ \bullet\!\!-\!\!\circ & \bullet\!\!-\!\!\circ & & \bullet\!\!-\!\!\circ \\ g(t) = & g_1(t) & + & g_2(t) \end{array}$$

(c) Skizzieren Sie $g_1(t)$.

(d) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung, daß $g(t)$ reell und *kausal* ist, das Zeitsignal $g_2(t)$.

(e) Geben Sie die Formel von $G_{\mathrm{Im}}(f) = \mathrm{Im}\{G(f)\}$ an.

(8 Pkt.) 2. Die Übertragungsfunktion eines Tiefpaßfilters wurde im äquidistanten Frequenzraster f_0 für die Frequenzen $0, f_0, 2f_0, \ldots, 5f_0$ erfaßt. Die folgende Tabelle enthält die entsprechenden Werte der Übertragungsfunktion $G(f)$ für diese Frequenzen.

f	$-4f_0$	$-3f_0$	$-2f_0$	$-f_0$	0	f_0	$2f_0$	$3f_0$	$4f_0$	$5f_0$
$G(f)$					2	$2+\mathrm{j}$	$1+2\mathrm{j}$	j	0	0

(a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle, um mit einem zweiseitigen Spektrum arbeiten zu können. Der Tiefpaß hat eine reelle Impulsantwort.

Die Impulsantwort $g(t)$ des Filters soll aus den vorliegenden Stützstellen der Übertragungsfunktion mit Hilfe der inversen DFT abgeschätzt werden. Die $N = 10$ Schätzwerte von $g(t)$ sollen mit $\tilde{g}(nt_0)$ bezeichnet werden. Für f_0 gilt $f_0 = 2$ kHz.

(b) Wie groß ist t_0?

(c) Geben Sie den DFT-Frequenzbereichsvektor $\boldsymbol{D}$ an.

(d) Berechnen Sie den DFT-Zeitbereichsvektor $\boldsymbol{d}$ an den Stellen $n = 0$ sowie $n = 5$. Gewinnen Sie aus $d(0)$ und $d(5)$ die *entsprechenden Schätzwerte* der Impulsantwort, und geben Sie diese an.

(6 Pkt.) 3. Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion eines Tiefpaß-Filters

$$G(f) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |f| < \frac{1}{4T} \\ \frac{3}{2} - |f|\,2T & \text{für} \quad \frac{1}{4T} \le |f| < \frac{3}{4T} \\ 0 & \text{für} \quad |f| \ge \frac{3}{4T}. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie $G(f)$.

(b) Berechnen Sie den Wert der zugehörigen Impulsantwort zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$g(0) = \ldots \qquad ?$$

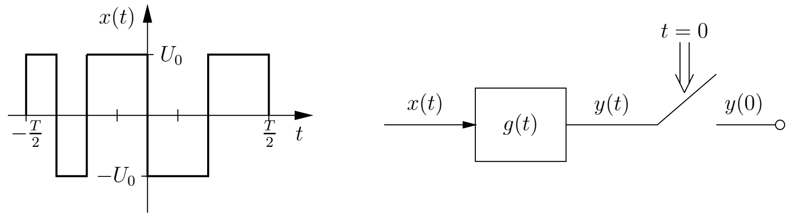
Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nicht $g(t)$ für alle t ermitteln.

(c) Nehmen Sie nun an, daß $g(t)$ mit der regulären Stoßfolge

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - nT)$$

im äquidistanten Zeitraster T abgetastet wird. Geben Sie die Abtastwerte $g(nT)$, n ganzzahlig, an.
Hinweis: Eine effiziente Lösung ist nur durch Betrachtung im Frequenzbereich möglich.

(6 Pkt.) 4. Ein Sender erzeugt das im linken Teil der folgenden Skizze dargestellte Signal $x(t)$. Außerhalb des Zeitintervalls $[-T/2, T/2]$ gilt $x(t) = 0$



(a) Handelt es sich um ein Energiesignal? Begründung Sie Ihre Aussage.

Dieses Signal wird gemäß Skizze auf ein sogenanntes „Matched Filter" mit der Impulsantwort

$$g(t) = k \cdot x(-t), \qquad k > 0,\ \text{reell}$$

gegeben. Dessen Ausgangssignal $y(t)$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ (einmalig) abgetastet.

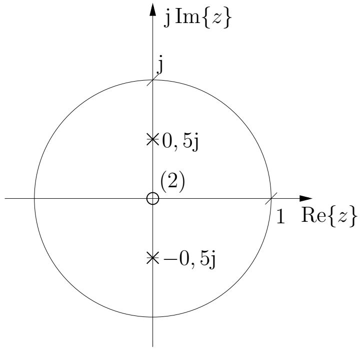
(b) Skizzieren Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Filters.

(c) Berechnen Sie die Antwort $y(0)$ des Filters zum Zeitpunkt $t = 0$.
Hinweis: Sie können den Amplitudenwert $y(0)$ durch Betrachtung im Zeitbereich für diesen einen Zeitpunkt berechnen.

(d) Die Fouriertransformierte von $x(t)$ sei bekannt und wird mit $X(f)$ bezeichnet. Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(f)$ des Filters als Funktion von $X(f)$?

(e) Geben Sie die Fouriertransformierte $Y(f)$ des Signals $y(t)$ als Funktion des bekannten Spektrums $X(f)$ an.

(9 Pkt.) 5. Gegeben sei das PN-Bild eines Digitalfilters. Im Ursprung liegt eine doppelte Nullstelle (durch „(2)“ gekennzeichnet).



(a) Ist das Filter stabil? Begründen Sie Ihre Aussage.

(b) Handelt es sich um ein Minimalphasensystem? Begründen Sie Ihre Aussage.

(c) Wie groß ist der Filtergrad?

(d) Geben Sie die Übertragunsfunktion $G_z(z)$ in Polynomform an. Es gilt $k_z = 1$.

(e) Geben Sie die Formel für die spektrale Charakteristik $G(f)$ des Filters an.

(f) Skizzieren Sie das Verzweigungsnetzwerk.

Es soll nun untersucht werden, wie das Filter am Ausgang reagiert, wenn das System am Eingang durch die Zahlenfolge $\{c_1(n)\}$ angeregt wird. Es gilt

$$c_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{für} \quad n = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(g) Wie lautet die z-Transformierte $U_{z1}(z)$ gemäß $\{c_1(n)\} \circ\!\!\stackrel{z}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\, U_{z1}(z)$?

(h) Wie lautet die z-Transformierte $U_{z2}(z)$ der ausgangsseitigen Zahlenfolge $\{c_2(n)\}$?

(i) Wie lautet die ausgangsseitige Zahlenfolge $\{c_2(n)\}$?

Aufgabe 6 auf Rückseite.

(11 Pkt.) 6. Gegeben ist das folgende Signal:

$$u(t) = \underbrace{U_0 \,\mathrm{si}(\pi B t)}_{u_A(t)} \cdot \underbrace{\sqrt{2}\cos\left(2\pi f_T t + \frac{\pi}{2}\right)}_{u_B(t)} \qquad \text{mit} \qquad f_T = 3B \; .$$

(a) Ermitteln Sie das Spektrum $U_A(f)$ der Teilkomponente $u_A(t)$ (Skizze und Formel).

(b) Ermitteln Sie das Spektrum $U_B(f)$ der Teilkomponente $u_B(t)$ (Skizze und Formel).

(c) Ermitteln Sie das Spektrum $U(f)$ von $u(t)$ (Skizze und Formel).

(d) Skizzieren Sie das Spektrum $U_\mathrm{T}(f)$, das sich nach einer Bandpaß-Tiefpaß-Transformation von $U(f)$ bezüglich der Frequenz f_T ergibt.

(e) Skizzieren Sie das zugehörige Zeitsignal $u_\mathrm{T}(t)$.

(f) Das Tiefpaßsignal $u_\mathrm{T}(t)$ soll abgetastet werden. Wie groß muß die Abtastfrequenz f_p mindestens ausfallen, damit sich $u_\mathrm{T}(t)$ theoretisch fehlerfrei aus dem abgetasteten Signal rekonstruieren läßt?

Die Abtastung soll mit der verschobenen Stoßfolge

$$m(t) = t_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n t_0 - \frac{t_0}{2}\right) \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{1}{f_p}$$

erfolgen.

(g) Berechnen und skizzieren Sie das Spektrum $M(f)$ des Signals $m(t)$.

(h) Skizzieren Sie das Spektrum $U_{\mathrm{T,sample}}(f)$ des abgetasteten Signals

$$u_{\mathrm{T,sample}} = u_\mathrm{T}(t) \cdot m(t)$$

im Tiefpaßbereich für die in Aufgabenteil (f) ermittelte Abtastfrequenz f_p.

(+2 Pkt.) (i) **Bonus:** Skizzieren Sie das Spektrum $U_{\mathrm{sample}}(f)$, wenn anstelle von $u_\mathrm{T}(t)$ das ursprüngliche Bandpaßsignal $u(t)$ mit $m(t)$ und der in Aufgabenteil (f) ermittelten Frequenz f_p abgetastet wird. Es gilt

$$u_{\mathrm{sample}}(t) = u(t) \cdot m(t).$$