MATHEMATIK I

1.Fachsemester
Studiengang: Medientechnologie
Priv. Doz. Dr. Thomas Böhme

t.boehme@mathematik.tu-ilmenau.de
Tel. (69) 3630
www.mathematik.tu-ilmenau.de/~tboehme/

< Inhaltsverzeichnis >

1. Grundlagen

1.1. Aussagen

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde welches wahr oder falsch ist!

- zusammengesetzte Aussagen

① Negation:

$\neg A$ *ist auch* $\overline{A}$ Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
w	f
f	w

② Konjunktion:

$A \wedge B$ (…hier A und B)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

③ Disjunktion:

$A \vee B$ (…hier A oder B)

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

④ Implikation:

$A \Rightarrow B$ (…hier A impliziert B oder aus A folgt B)

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

wenn A falsch ist, weiß man nichts über B

⑤ Äquivalenz:

$A \Leftrightarrow B$ (…oder auch A = B / hier A und B sind äquivalent)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist

1. Beispiel: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) =: C$

w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

2. Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) =: D$

w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w

Kettenschluß

3. Beispiel: $A \wedge \neg A =: B$

w	f
f	f

TAUTOLOGIE

DEF. Eine Aussagenverbindung heißt Tautologie, wenn sie fest für alle möglichen Wahrheitswerte der beteiligten Aussagenwerte wahr sind!

Aussageform:

sprachliches Gebilde, welches eine oder mehrere Variablen enthält und durch Ersetzung der Variablen durch konkrete Werte zu einer Aussage wird

Def: $A(x) = X^e - 2x + 3 \geq 0$

1.2. Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bekannter wohlunterschiedener Objekte
Georg Cantor

$x \in M$ $\Rightarrow$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ $\Rightarrow$ x ist nicht Element der Menge M

Beschreibung von Mengen:

① Aufzählung aller Elemente:

$$M = \left\{2, 1, \frac{1}{3}\right\}$$

② Darstellung als Teilmenge:

…einer bekannten Menge durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft…

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 1 < 10\right\}$$
$$= \{1, 2\} \qquad |A| = 2$$

…die Anzahl der Elemente einer Menge heißt Kordinalität und wird mit |A| bezeichnet…

Def.: 2 Mengen A und B sind gleich (in Zeichen: A = B)
wenn gilt $x \in$ B

Def.: Eine Menge B ist Teilmenge einer Menge A (in Zeichen: $B \subseteq A$)
wenn gilt $x \in B \Rightarrow x \in A$

- Bemerkung:

a; (A=B) $\Leftrightarrow$ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
b; Eine Teilmenge B einer Menge A heißt eine echte Teilmenge von A, wenn gilt: B$\subseteq$A, d.h. es gibt ein Element $x \in A$ *so dass* $x \notin B$

Def.: Es sein A und B zwei Mengen, dann heißt die Menge $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ die Vereinigungsmenge von A und B, man schreibt A$\cup$B

Def.: Es sein A und B zwei Mengen, dann heißt die Menge $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ der Durchschnitt der Mengen A und B, man schreibt $A \cap B$

Def.: Es sein A und B zwei Mengen, dann heißt die Menge $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ die Differenz der Mengen A und B, man schreibt A \ B …*hier A ohne B*

1. Beispiel:

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$B = \left\{ x \mid \begin{matrix} x & \textit{ist natürliche Zahl} \\ 1 & x \leq 10 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} A \vee B &= B \\ A \wedge B &= A \\ A \setminus B &= \varnothing \\ B \setminus A &= \{8,9,10\} \end{aligned}$$

2.Beispiel:

$$A = \left\{ x \mid \begin{matrix} x & = 2k_1 \\ k & \textit{ist eine natürliche Zahl} \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ x \mid \begin{matrix} x & = 3k_1 \\ k & \textit{ist eine natürliche Zahl} \end{matrix} \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ x \mid \begin{matrix} x \textit{ ist eine nat. Zahl} \\ \wedge \left(x \textit{ ist durch } 2 \textit{ teilbar} \right) \\ \vee \left(x \textit{ ist durch } 3 \textit{ teilbar} \right) \end{matrix} \right\}$$

Einige wichtige Mengen:

$\varnothing$ die leere Menge

$\mathbb{N}$ Menge aller natürlichen Zahlen, d.h. $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ $\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Q}$ Menge aller rationalen Zahlen

$\mathbb{Z}$ Menge aller ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge aller reellen Zahlen

Def.: Es sein A und B zwei Mengen, dann bezeichne A x B die Menge

$$\{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Die Elemente von A x B heißen Paare, A x B heißt das <u>kartesische Produkt</u> von A und B!

<u>1.Beispiel:</u>

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{a,b\}$$

$$AxB = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

<u>2.Beispiel:</u>

$$A = B = \mathbb{R}$$
$$AxB = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Def.: Es sein $A_1,\ldots,A_k$ k Mengen, dann bezeichne $A_1 x \ldots x A_k$ die Menge

$$\{(x_1,\ldots,x_k) \mid x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge x_k \in A_k\}$$

Die Elemente von $A_1 x \ldots x A_k$ heißen k-Tupel

<u>Beispiel:</u>

$A_1 = A_2 = A_3 = \mathbb{R}$
$A_1 x A_2 x A_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge i \in \{1,2,3\}\}$

<u>1.3. Quantoren und Aussageformen</u>

Quantoren:

$\forall$ für alles

$\exists$ es existiert ein

$\exists !$ es existiert genau ein

<u>1. Beispiel:</u>

$\forall\ x \in \mathbb{N}: \quad x \geq 1$ …wahre Aussage!
Für alle natürlichen Zahlen x gilt: $x \geq 1$

2. Beispiel:

$\forall\ x \in \mathbb{N} \quad \exists p$ Primzahl : x = p + q

Jede natürliche Zahl ist Summe zweier Primzahlen (Goldbach Vermutung)

Aussagen:

Ist P(x) eine Aussageform,

dann sind:
$\forall \quad x \in M$: P(x)
$\exists \quad x \in M$: P(x)
$\exists! \quad x \in M$: P(x)

Ist P(x,y) eine Aussageform,

dann sind:
$\forall \quad x \in M$: P(x,y)
$\exists \quad x \in M$: P(x,y)
$\exists! \quad x \in M$: P(x,y)

Beispiel: P(x,y): = x-y = 1

1.4. Abbildungen und Funktionen

Def: Es sein x,y zwei Mengen. Eine Abbildung (Funktion) f von x in y ist eine Zuordnungsvorschrift, welche jedem Element $x \in X$ ein Element y = f(x) an Y zuordnet

altern. Def: Eine Abbildung f von einer Menge Xx in einer Menge Y ist eine Teilmenge f von Xxy so dass:

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

f : A $\rightarrow$ B

Ist f : A $\rightarrow$ B eine Abbildung (Funktion) von einer Menge A in einer Menge B, dann heißt A der Definitionsbereich der Abb. f
und B der Wertebereich (oder auch Bildbereich) der Abb. f

Beispiel:

f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit f(x) = x^2

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Wertebereich: $\mathbb{R}$

Nicht jedes Element des Wertebereichs trift als Bild eines Elements des Definitionsbereiches auf, z.B. -1 ist nicht Quadrat einer reellen Zahl

Ist f : A $\rightarrow$ B eine Abb. und $A' \subseteq A$

dann schreibt man:

$$f(A') := \{ f(x) \mid x \in A' \}$$

Beispiel: $f(\mathbb{R}) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \geq 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$

Def: Ist f : A $\rightarrow$ B eine Abb. dann heißt f

① injektiv, wenn f(x) = f(x´) => x = x´

② surjektiv, wenn f(A) = B

③ bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist

1.Beispiel:

f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ F ist nicht injektiv, denn

$f(1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = f(-1)$

2.Beispiel:

g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ g ist injektiv

wenn: f(x) = f(x´) für $x, x' \in \mathbb{R}$

dann: $x^3 = x'^3$ darum folgt:

$|x^3| = |x'^3|$, damit $|x| = |x'|$

3. Beispiel:

Ist h injektiv?

$h =: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit h(x) = 3x+5

Sei h(x) = h(x´) für $x, x' \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ h(x) = 3x+5 = 3x´+5 = h(x´)

$\Rightarrow$ 3x = 3x´

$\Rightarrow$ x = x´

$\Rightarrow$ *injektiv!*

Ist f(x) = x² surjektiv?

$\Longrightarrow$ Nein, da f(x) = x² = -1

Ist g(x) = x³ surjektiv?

$\Longrightarrow$ Ja

Ist h(x) = 3x+5 surjektiv?

$\Longrightarrow$ Ja

4. Beispiel:

$l : D \to \mathbb{R}$ *mit*

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ *und* $l(x) = \ln x$

l ist injektiv und nicht surjektiv

Ist f : A $\to$ B eine injektive Abb., dann gibt es eine Abb. g : f(A)$\to$A so, dass gilt:
g(f(x)) = x für alle $x \in A$
g heißt die Umkehrfunktion (Umkehrabbildung) von f und wird mit f^{-1} bezeichnet

A \ P	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$		
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$			
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$				

↘

$A = \mathbb{N}$

$B = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \right\}$

A und B sind gleichmäßig!

Mann kann unendliche Mengen folgendermaßen charakterisieren:
Eine Menge ist genau dann unendlich, wenn sie zu einer ihrer Teilmengen gleichmäßig ist!

1.5. Beweisverfahren

direkte Beweise:

Beispiel:

Satz: Ist $n \in \mathbb{N}$ und n gerade, dann ist n² gerade

Beweis: $n \in \mathbb{N}$ und gerade => $\exists k \in \mathbb{N}$ so, dass n = 2k
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
=> $n^2 = 2l$ mit $l=2k^2$
=> n^2 = ist gerade!

Eine spezielle Form eines direkten Beweises ist anstelle von A => B zu zeigen $\neg A \Rightarrow \neg B$ (Beweis durch Kontraposition)

<u>Beispiel:</u>

Satz: Ist $n \in \mathbb{N}$ und n^2 ist gerade, dann ist n gerade

Beweis: A= $n \in \mathbb{N}$ und n^2 ist gerade
B=n ist gerade
zu zeigen ist A=>B

dazu reicht es aus, zu zeigen es gilt: $\neg A \Rightarrow \neg B$

$\neg B$ = n ist ungerade
n = 2k+1 für ein $k \in \mathbb{N}$
$n^2 = (2k+1)^2=4k^2+4k+1$
$= 2(2k^2+2k)+1=2l+1$ mit $l=2k^2+2k$

⇨ n^2 ist eine ungerade Zahl ($\in \mathbb{N}$)
⇨ $\neg A$

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist

Widerspruchsbeweis: *(indirekter Beweis)*

<u>Beispiel:</u>

Satz: $\sqrt{2}$ ist nicht rational

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ wäre rational

$\exists p, q \in \mathbb{R}$ so, dass
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ p und q haben keinen gemeinsamen Teiler
$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\right) q = p$
$\Rightarrow 2q^2 = p^2$
$\Rightarrow p^2$ ist gerade

Satz: $\Rightarrow$ p ist gerade

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: p = 2k$

$\Rightarrow \cancel{2}q^2 = (2k)^2 = \cancel{2} \cdot 2k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ ist gerade

$\Rightarrow$ 2 teilt q und p $\Rightarrow$ Widerspruch zur Annhame, das p und q keine gemeinsame Teiler haben

1.6. Reelle Zahlen

Zahlbereich	$\forall a,b \;\exists x$ $a + x = b$	$\forall a,b$ *mit* $a \neq 0$ $\exists x \;\; a + x = b$	$\forall a, \forall n \;\exists x$ $x^n = a$
$\mathbb{N}$	f (5 + x = 3)	f (2x = 1)	f ($x^2 = 2$)
$\mathbb{Z}$	w	f (2x = 1)	f ($x^2 = 2$)
$\mathbb{Q}$	w	w	f ($x^2 = 2$)
$\mathbb{R}$	w	w	f ($x^2 = 2$)

1.6.1. Algebraische Eigenschaften von: $\mathbb{R}$

Im Bereich der reellen Zahlen sind eine Addition „+“ und eine Multiplikation „ · “ erklärt, d.h. für alle a,b $\in \mathbb{R}$ *existiert a + b* $\in \mathbb{R}$ *und* $a \cdot b \in \mathbb{R}$

- Eigenschaften der Addition und Multiplikation

(1) Assoziativgesetz:

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$: a + (b+c) = (a+b) + c
$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(2) Kommutativgesetz:

$\forall a,b \in \mathbb{R}$: a + b = b + a
$\forall a,b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$

(3) Distributivgesetz:

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}:$ a $\cdot$ (b+a) = a$\cdot$b + a$\cdot$c

(4) $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}:$ a + x = b
$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0:$ a$\cdot$x = b

man schreibt: x = b$\cdot$a , wenn a + x = b
x = $\frac{b}{a}$ = b : a = b / a , wenn a$\cdot$x = b

…alle genannten Eigenschaften gelten auch für den Bereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

…$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bilden bzgl. der Operationen „+“ und „$\cdot$“ einen kommutativen Körper

1.6.2. Ordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$

bekannt ist:

Für je 2 reelle Zahlen a,b $\in \mathbb{R}$ trifft genau einer der folgenden drei Fälle auf:

(i) a$\subset$b
(ii) a = b
(iii) a > b

- Eigenschaften der „<“ Relation:

(a) Transitivität

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
((a < b) $\cap$ (b$\subset$c)) $\Rightarrow$ (a$\subset$c)

(b) Verträglichkeit mit den Operationen + und –

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

(1) (a > b) $\Rightarrow$ (a + c) > (b + c)
(2) (c > a) $\cap$ (a > b) $\Rightarrow$ (a$\cdot$c) > (b$\cdot$c)
(3) (c < a) $\cap$ (a > b) $\Rightarrow$ (a$\cdot$c) < (b$\cdot$c)

$\Rightarrow$ *Folgerungen:*

a < b $\Rightarrow$ -b < -a
0 < a < b $\Rightarrow$ 0 < $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
$a^2 > a \;\; \forall a \in \mathbb{R}\{a\}$

Schreibweise:

Wenn (a = b) $\cup$ (a > b), dann schreibt man a $\geq$ b
(analog erklärt man a $\leq$ b)

Intervalle:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty,-a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$

Beispiel: (x – 2) · (x + 3) < 0

Ziel ist es, die Menge L:= $\{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)\cdot(x+3) < 0\}$
als Vereinigung von Intervallen darzustellen

(x – 2) · (x + 3) < 0 $\Leftrightarrow$ (((x - 2) < 0) $\cap$ (x + 3) > 0))
$\cup$ (((x - 2) > 0) $\cap$ (x + 3) < 0))

1. Fall: (x - 2) < 0 und (x + 3) > 0
(x - 2) < 0 $\Leftrightarrow$ x < 2 $\Leftrightarrow$ $x \in (-\infty, 2)$
(x + 3) > 0 $\Leftrightarrow$ x > -3 $\Leftrightarrow$ $x \in (-3, \infty)$

$x \in (-\infty, 2) \cap x \in (-3, \infty)$

$\Leftrightarrow$ $(-\infty, 2) \cap (-3, \infty)$ = (-3,2)

2. Fall $(x - 2) > 0$ und $(x + 3) < 0$

$x \in (2,\infty) \cap x \in (-\infty,-3)$

$\Leftrightarrow \quad (2,\infty) \cap (-\infty,-3) = \emptyset$

$\downarrow$

$L = (-3,2) \cup \emptyset = (-3,2)$

1.6.3. Beträge

für $a \in \mathbb{R}$ definiert man:

$$|a| := \begin{cases} a, \text{wenn } a \geq 0 \\ -a, \text{sonst} \end{cases}$$

a heißt der (absolute) Betrag der Zahl a

- Eigenschaften von |a|:

$\forall a,b \in \mathbb{R}$

(i) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ …Dreiecksgleichung

Bemerkung: *Alle Aussagen ihrer Ordnungseigenschaften und Beträg reeller Zahlen gelten sinngemäß auch für rationale Zahlen.*

1.7. Die natürlichen Zahlen

…peano axiome…

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$
3. $n \neq m \Rightarrow n + 1 \neq m + 1$
4. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \neq 1$
5. $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $(1 \in M \cap (\forall k (k \in M) \Rightarrow k + 1 \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$

Rekursive Definition von $\sum$ und $\prod$:

① Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Dann definieren wir:

(1) $\sum_{i=1}^{1} a_i =: a_i$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i$

Bemerkung: $\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

② Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Dann definieren wir:

(1) $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}: \prod_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} + \prod_{i=1}^{n} a_i$

Prinzip der vollständigen Induktion

A(n) ist eine Aussageform abhängig von $n \in \mathbb{N}$ wenn gilt:

(1) A(1) ist wahr
(2) $\forall k \in \mathbb{N}$: H (k) $\rightarrow$ A (k+1)

dann ist A(n) wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel:

(1) Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Beweis: (vollständige Induktion nach n)

n = 1 $\quad A(1): \sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{1}{2} 1(1+1)$ w.A.

zu zeigen ist nun: A(k) $\Rightarrow$ A(k+1) $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^{k} i = (k+1) + \frac{1}{2} k(k+1) = \frac{1}{2} (2(k+1) + k(k+1)$$

$$= \frac{1}{2} (k + 1) \cdot (k + 2)$$

Also A(k) $\Rightarrow$ A (k+1) $\forall k \in \mathbb{N}$ w.A.

(2) Permutationen

Def.: Eine Permutation einer endlichen Menge M ist eine bijektive Abbildung von M auf M

Beispiel: M = { 1,2,3,4 }

	$\pi(i)$
1	2
2	4
3	3
4	1

Ziel: Berechnung der Anzahl aller (verschiedenen) Permutationen einer n-elementigen Menge

Behauptung: Anzahl der Permutationen von

{1,2,…,n} = n! $\left(= \prod_{i=1}^{n} i \right)$

Anzahl der Permutationen von {1,…,n} = n!

Beweis: vollständige Induktion nach n

n = 1

Es gibt genau eine Bijektion von {1}auf {1}

Anzahl der Permutationen von {1} = 1 = 1! w.A.

Sei $\prod = \{1, 2, ..., k+1\} \rightarrow \{1, 2, ..., k+1\}$

eine Permutation von $\{1, 2, ..., k+1\}$

∏ (i)	j	k+1

Jede Permutation von {1,…,4} kann auf k+1 weisen und zu einer Permutation von {1,…,k+1} ergänzt werden.

Also gibt es (k+1) Permutationen von {1,…,k}

= (k+1) $\cdot$ k! = (k+1)! Permutationen von {1,…, k, k+1}

(3) Binomialkoeffizient: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (n \geq m \geq 1)$

Behauptung: Anzahl der m elementigen Teilmengen einer n elementigen Menge $= \binom{n}{m}$

Beispiel: M = {a,b,c} Menge aller 2-elementigen Teilmengen von M = {{a,b},{a,c},{b,c}}

Beweis: vollständige Induktion nach n
m = 1
Anzahl der 1-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge = Anzahl der Elemente = n

$$= \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!1!} = n$$

Jede k-elementige Teilmenge kann auf n-k zu einer (k+1) – elementigen Teilmenge erweitert werden $\{\bar{1}, 2, \bar{3}, 4, \bar{5}\}$ $\{1,3,5\}$

	{1,2}	{1, 3}	{1, 4}
{1,2,3,4} →	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,3,4}
	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,4}

Anzahl der (k+1) elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge = (n-k) Anz. der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge (k+1)

$$= \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} - \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k)!n!}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)}$$

$$= \binom{n}{k+1}$$

r! = r (r-1)! = r(r-1)(r-2)!

Bemerkungen:

(1) $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ für $1 \geq m \geq n$

(2) Man setzt $\binom{n}{m}$ = 0 für $m > n \geq 1$

(3) Man setzt 0! = 1 und damit erhält man $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{0!} = 1$

(4) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

(5) $\binom{n}{m} + \binom{n}{n+m} = \binom{n+1}{m+1}$

Satz: (Binomischer Satz)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $a,b \in \mathbb{R}$ *gilt* $(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} i = \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

Als Folgerung aus dem Binomischen Satz erhält man die Anz. aller Teilmengen einer n-elementigen Menge = 2^2

Beweis:

Anz. aller Teilmengen einer n-elementigen Menge

$= \sum_{i=0}^{nn} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n$ ...*binomischer Satz*

1.8. Komplexe Zahlen

1.8.1. Algebraische Eigenschaften

Wir setzen $i = \sqrt{-1}$, also gilt $i^2 = -1$

Wir definieren: Eine komplexe Zahl z ist ein Ausdruck der Form z = x + iy wobei x, $y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Auf der Menge $\mathbb{C}$ *werden zwei Operationen Addition („+“) und Multiplikation („·“) definiert:*

Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei komplexe Zahlen

Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Multiplikation:

$z_1 \cdot z_2 := (x_1 \cdot x_2) - (y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1y_1 + y_2x_2) \cdot (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$

$= x_1x_2 + iy_1x_2 + y_2x_1 – y_1y_2 – x_1x_2 – y_1y_2 + i\cdot (x_1y_2+x_2y_1)$

Eigenschaften der Operationen "+", "$\cdot$"

(1) $z_1+z_2 = x_1+x_2+i\cdot(y_1y_2) = x_2+x_1+i\cdot(y_2+y_1) = z_2+z_1$
(Kommutativität)

(2) Jede Gleichung der Form z_1-z_2+$(a+i\cdot b)$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $(a+i\cdot b)$ mit $a,b\in\mathbb{R}$

Wir rechnen nach:

$x1+iy1 = (x_2+iy_2) + (a+ib)$
$= (x_2+a) + i\cdot (y_2+b) \Leftrightarrow x1 = x_2+a$ und
$y2 = y_2+b$

Da jede Gleichung der Form $c = d + x$ in $\mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung hat, existieren $a,b\in\mathbb{R}$ und sind eindeutig bestimmt.

Wir schreiben:

$a + ib = z_1 – z_2$

(3) Es gilt für alle $z_1; z_2; z_3 \in\mathbb{C}$

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
(Assoziativität)

(4) $z_1\cdot z_2 = x_1\cdot x_2+ y_1\cdot y_2 + i\cdot (x_1y_2+y_1x_2)$

$= x_2x_1 – y_2y_1 + i(y_2x_1 + y_1x_2=$

$= z_2\cdot z_1$ *(Kommutativität)*

(5) Jede Gleichung der Form $z_1 = z_2\cdot(a+ib)$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $a + ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ vorausgesetzt $x_2 \neq 0$ oder $y_2 \neq 0$

Wir betrachten zuerst den Fall:

$z_2 = x_2 + i0\ (a\neq 0)$
$x_1 + iy_1 = (x_2 + i0)\cdot(a + ib)$

$= x_2a + ix_2b$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2a$ und $y_1 = x_2b$
$\Leftrightarrow a = \frac{x_1}{x_2} \quad b = \frac{y_1}{x_2}$

Der allgemeine Fall:

$z_2 = x_2 + iy_2$ mit ($x_2 \neq 0 \cup y_2 \neq 0$

Wir setzen: $\overline{z_2}$: $= x_2 - iy_2$
$= x_2 + i(-y_2)$

($\overline{z_2}$ heißt die zu z2 konjugiert komplexe Zahl)

Wir bilden:

$$z_1 = z_2 (a + ib) \qquad | \overline{z_2}$$
$$\overline{z_2} \cdot z_1 = (\overline{z_2} \cdot z_2) \cdot (a + ib)$$

Nebenrechnung:

$$\overline{z_2} \cdot z_2 = (x_2\text{-}iy) \cdot (x_2+iy_2)$$
$$= x_2^2+y_2^2 + i \cdot (x_2y_2\text{-}x_2y_2)$$
$$= x_2^2+y_2^2$$

$a,b \in \mathbb{R}$ existieren und sind eindeutig bestimmt, da der Spezialfall $x_2^2 + y_2 + i \cdot 0$ vorliegt

(6) Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt:

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ *(Distributivität)*

Bemerkungen:

(1) Wir identifizieren die komplexe Zahl x = a + i0 = 0
Damit ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

(2) Man schreibt: $z_1 - z_2$ für die Lösung der Gleichung $z_1 = z_2 + (a+ib)$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für die Lösung der Gleichung $z_1 = z_2 \cdot (a \cdot ib)$ mit $z_2 \neq 0$

(3) Die komplexen Zahlen bilden einen kommutativen Körper.

Beispiel:

a) $z_1 = 1 + i5$

$z_2 = -1 + i3$

$z_1+z_2 = (1+(-1)) + i(5+3)$
$= 0 + i8 = 8i$

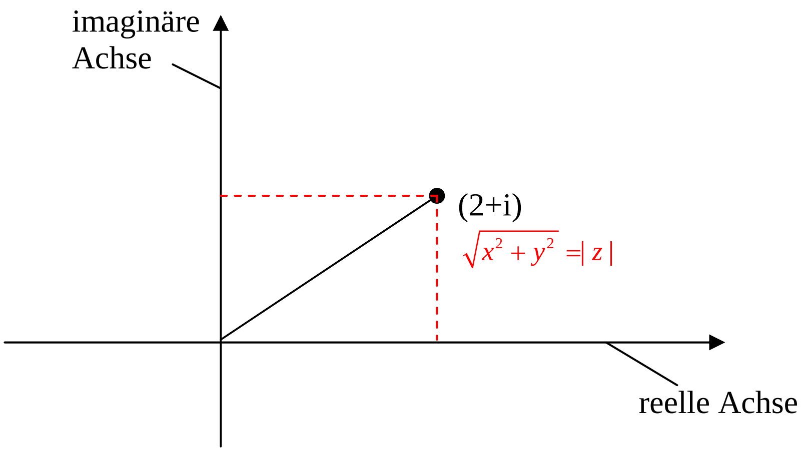
$z_1 \cdot z_2 = (1 + i5) \cdot (-1+i3)$
$= 1 –((-1) + i(5-3)$
$= 2 + i2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i5)\cdot \overline{z_2}}{(-1+i3)\cdot \overline{z_2}}$$
$$= \frac{(1+i5)\cdot(-1-i3)}{(-1+i3)\cdot(-1-i3)}$$
$$= \frac{-1-i3-i5+15}{(-1)^2+3^2}$$
$$= \frac{14-i8}{10} = 1,4-i0,8 = 1,4-0,8i$$

1.8.2. Zahlenebene

(…Gaußs´sche Zahlenebene)

Die komplexe Zahl z = x + iy wird als Punkt mit den Koordinaten (x,y) in einer Ebene dargestellt.



Bezeichnungen:

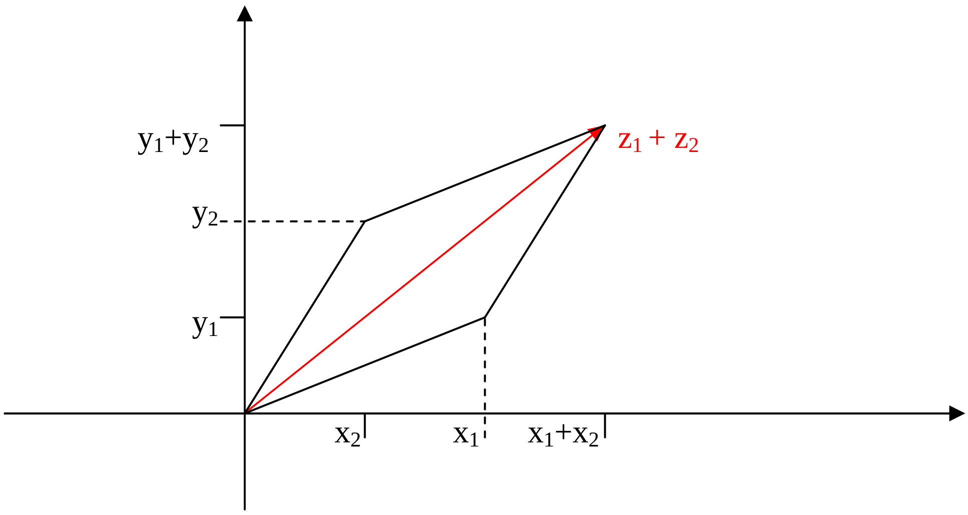
Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ so heißt: x der Realteil von z
y der Imaginärteil von z

man schreibt: x = Re(z)
y = Im(z)

Also gilt z = Re(z) + i Im(z)

Ferner setzt man: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$ $\quad z_1+z_2 = x_1+x_2+ i((y_1+y_2)$

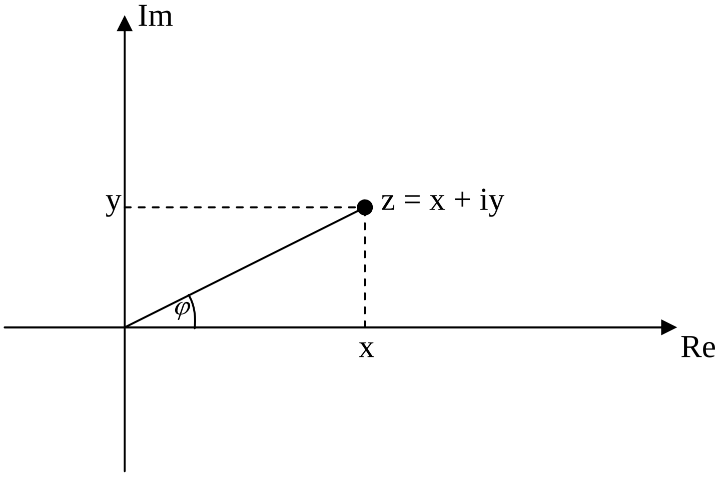


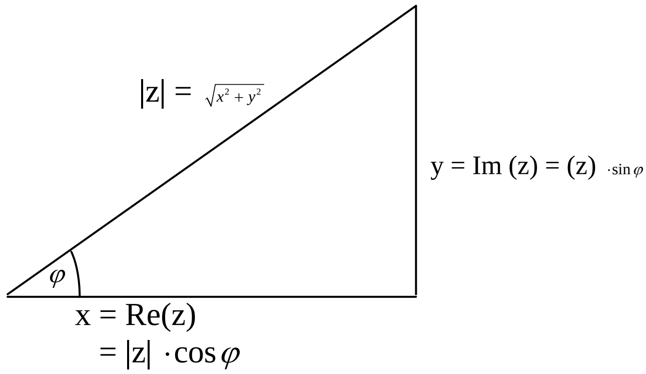
Intuitiv erkennt man: $|z1| + |z2| \geq |z1+z2|$ …*Dreiecksgleichung*

Bemerkungen: *Es gelten folgende Beziehungen*:

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$$
$$\overline{z} = z$$
$$\overline{z_1}\, z1 + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$$
$$|z1 \cdot z2| = |z1| \cdot |z2|$$

1.8.3. Polardarstellung



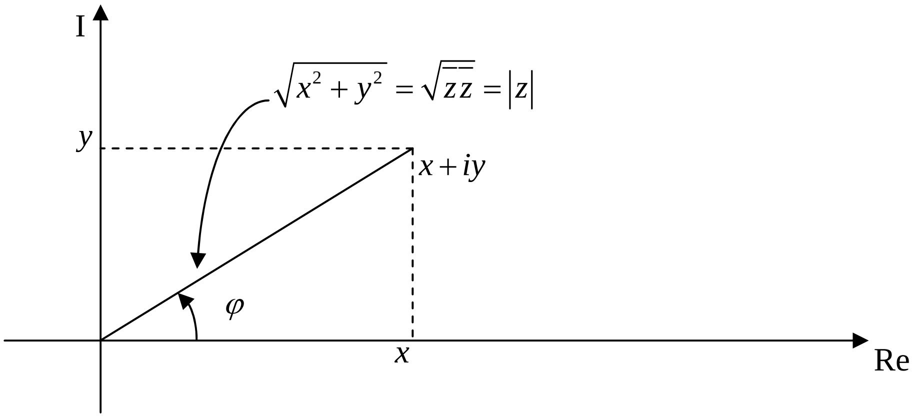


$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ …*Polardarstellung von z*

Man setzt: $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$ damit erhält man : $z = |z|\ e^{i\varphi}$ *(Exponentialdarstellung)*

Wiederholung

$i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$
$z = x + iy$
$(x+iy) + (u+iv) = (x+n) + i(y+v)$
$(x+iy) - (u-iv) = (xu-yv) + i(xv-yu)$
$\bar{z} = x - iy$



$y = |z| \cdot \sin\varphi$

$x = |z| \cdot \cos\varphi$

$z = x + iy$

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi)$

$\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{iy}$

$z = |z| \cdot e^{iy}$

$z = x + iy$

$x = \mathrm{Re}(z)$ …Realteil

$y = \mathrm{Im}(z)$ …Imaginärteil

Ist z eine komplexe Zahl mit der Polardarstellung $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$*,*
dann heißt φ *das Argument von z. Man schreibt arg(z) = p*

Eigenschaften von sin und cos:

(i) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad \forall\ \varphi$

(ii) $\sin 0 = o \cdot i \cdot \cos 0 = 1$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1; \cos\frac{\pi}{2} = 0$

(iii) $\sin\varphi = -\sin\varphi$; $\cos(-\varphi 9 = \cos\varphi$

(iv) $\sin(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi; \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

(v) $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi = \cos\varphi\sin\psi$

(vi) $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$

$\Rightarrow \qquad e^{io} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$|e^{iy}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$$

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi+\psi)} &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\ &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi) \\ &= (i \sin\varphi\cos\psi)(\cos\varphi\ i\sin\psi) \\ &= e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} \end{aligned}$$

Also gilt:

$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi}$ $z_2 = |z_2|\ e^{i\psi}$

$z_1 \cdot z_2 = (|z_1| \cdot e^{i\varphi})(|z_2| \cdot e^{i\psi}) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$ d.h.

$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ z_2 \neq 0$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\psi}}{|z_2| e^{i\varphi}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi-\psi)}$ d.h.

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ dann setzt man

$$z^n = \prod_{r=1}^{n} z = \underbrace{z \cdots\cdots n}_{n-mal}$$

dann gilt:

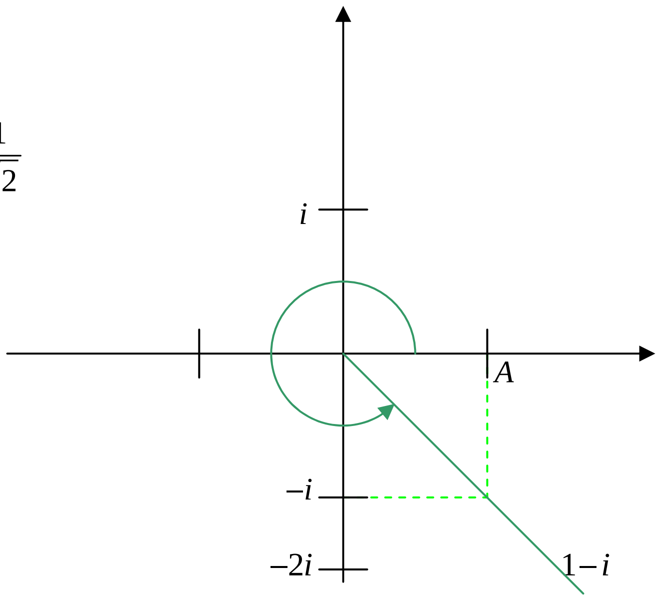
Wenn z = | z | $\cdot\, e^{i\varphi}$,dann z^n = (| z | $\cdot\, e^{i\varphi}$)^n

= $| z |^n \cdot e^{in\varphi}$,d.h. - $| z^n | = | z |^n$
- $\arg(z^n) = n \arg(z)$

Beispiel: z = 1 –i

$|z| = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \vee \varphi = -\frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

$$z = \underline{\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z^2 = |z|^2\, e^{i2\frac{7}{4}\pi} = (\sqrt{2})^2\, e^{i\frac{7}{2}\pi} = \underline{2e^{i\frac{7}{2}\pi} = -2i}$$

1.8.4. Wurzeln

Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w = |w|\ e^{i\psi}$ und $n \in \mathbb{N}$ $z^n = w$ (*)

Wir suchen alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung (*)

$z = |z|\ e^{i\varphi}$

$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |w|\, e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad |z|^n = |w|$

$n\varphi - \psi = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$|z| = \sqrt[n]{|w|}$

$\varphi = \dfrac{\psi + 2k\pi}{n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\varphi = \dfrac{\psi}{n}$ k = 0

$\varphi = \dfrac{\psi + 2\pi}{n}$ k = 1

$\varphi = \dfrac{\psi + 2n\pi}{n} = \dfrac{\psi}{n} + 2\pi = \dfrac{4}{n}$

$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad |z| = \sqrt[n]{|w|}$

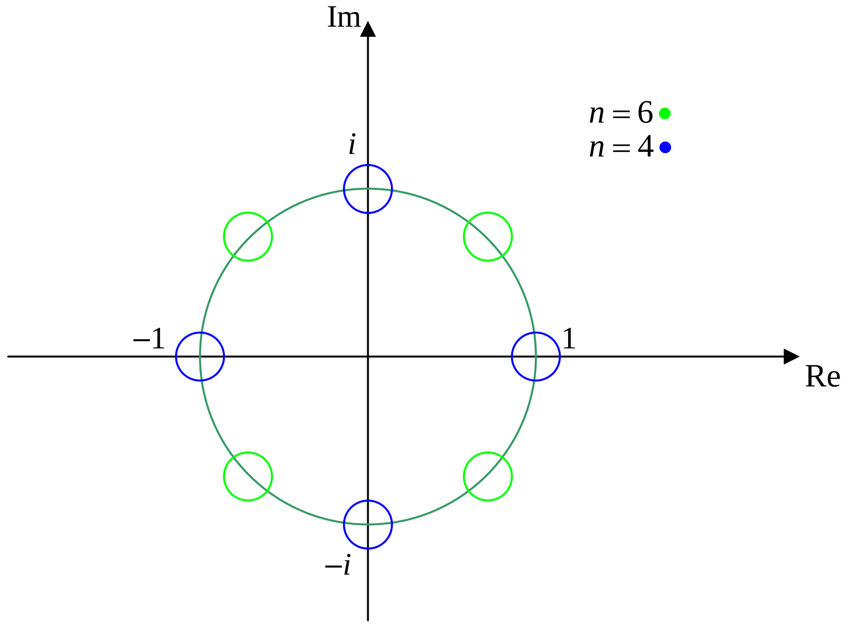
$\arg(z) = \varphi = \dfrac{\psi + 2k\pi}{n}$

Beispiel:

$w = 1$; $z^n = 1 = e^{io}$

$|z| = \sqrt[n]{|1|} = 1$

$\arg(z) = \varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$



quadratische Gleichungen:

$$x^2 + px + q \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

$$z^2 = w \;\Rightarrow\; \text{- } |z| = \sqrt[2]{|w|}$$

$$\text{- } \arg(z) = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{2} \qquad k = 0,1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\arg(w)}{2} \\[2ex] \dfrac{\arg(w)}{2} + \pi \end{cases} \qquad \boxed{z = \begin{cases} |z| e^{i\frac{\psi}{2}} \\[2ex] -|z| e^{i\frac{\psi}{2}} \end{cases}}$$

Beispiel:

$$z^2 - \underbrace{2}_{p}z + \underbrace{2}_{q} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

1.9. Polynome

Es seien a0, a1, …, ak $\in \mathbb{C}$ mit ak $\neq 0$

dann heißt der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_k x^k$$

ein Polynom in x.

Der Grad des Polynoms:

$\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ ist k und wird bezeichnet mit $\text{Grad}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i x^i\right) = k$

Ist P(x) = $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ ein Polynom, dann definiert P(x) eine Funktion

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$f(z) := P(z), z \in \mathbb{C}$

grad(P(x)) = k (Grad)

Beispiele:

	$P_1(x) = x^2+10x+1$	Grad $(P_1(x)) = 2$
	$P_2(x) = x^3+3x^2+6x+10$	Grad $(P_2(x)) = 3$
	$P_3(x) = 1$	Grad $(P_3(x)) = 0$
	$P_4(x) = 0$	Nullpolynom Grad $(P_4(x)) =: -1$

Satz: *…Koeffizientenvergleich*

Es gilt:

$$P(x)\sum_{i=0}^{k} a_i x^i = Q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i \text{ mit } a_k \neq 0 \quad b_l \neq 0 \quad \forall i = 0,...,k$$

$$\Leftrightarrow k = l \text{ und } a_i = b_i \quad \forall_i = 0,...,k$$

Beweis: $\boxed{\Leftarrow}$ *klar*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Wir dürfen annehmen* $k \geq l$

Induktion nach k:

k = 0 P(x) = a_0 = b_o = Q(X) $\Rightarrow k = l,\ a_o = b_o$

k > 0 P(x) = Q(x) $\Rightarrow P(0) = Q(0) \Rightarrow a_o = b_o$

$x \neq 0$ $P(x) = Q(x) \Rightarrow P(x) - a_o = Q(x) - b_o$

$$P(x) - a_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i x^i$$

$$Q(x) - b_0 = \sum_{i=1}^{l} b_i x^i \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x) - a_0}{x} = \frac{Q(x) - b_0}{x}$$

$\frac{P(x) - a_0}{x}$ ist ein Polynom mit Grad $\leq k - 1$

$\frac{Q(x) - b_0}{x}$ ist ein Polynom mit dem Grad $\leq l - 1$

$$\Rightarrow Grad\, \frac{P(x) - a_0}{x} = Grad\, \frac{Q(x) - b_0}{x}$$

$a_i = b_i$ für i = 1,…, k $\Rightarrow$ -ai = b_i für i = 0,1,…,k -k = l

Rechnen mit Polynomen

Seien $P(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ ($a_k \neq 0 \quad b_k \neq 0$)

Summe von P(x) und Q(x):

P(x) + Q(x) = $\sum_{i=1}^{k} a_i x^i + \sum_{i=0}^{l} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max\{k,l\}} \left(a_i + b_i\right) \cdot x^i$

Beispiel:

P(x) = $x^3 + x^2 + x$
Q(x) = $x^2 + 1$
P(x) + Q(x) = $x^3 + 2x^2 + x + 1$

Falls k = max {k,l} und k>l setze b_i = 0 für i $\in \{l+1, ..., k\}$

Falls l > k setze a_i = 0 für i $\in \{l+1, ..., l\}$

Produk von P(x) und Q(x):

$$P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=1}^{k+l} \left(\sum_{i=0}^{i} a_i b_{i-j} \right) x^i$$

Beispiel:

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + x^2 + x) \cdot (x2 + 1) = x^5 + 2x^3 + x^4 + x^2 + x$$

Koeffizient von x^0:

$$\sum_{j=0}^{0} a_j b_{0-j} = a_0 b_0$$

Koeffizient von x^1:

$$\sum_{j=0}^{1} a_j b_{1-j} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

Koeffizient von x^2:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j b_{2-j} = a_1 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

Polynomdivision mit Rest:

Sei $P(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ mit $a_k \neq 0$ $b_l \neq 0$

dann existieren Polynome S(x) und R(x) so, dass gilt:

$$P(x) = Q(x) \int (x) + R(x)$$

Grad (R(x)) < Grad(Q(x))

Beweis: Ist grad(Q) = l > grad (P(x)) = k, dann setze S(x) = 0 und R(x) = P(x)

Sei $k \geq l$ bilde:

$$Q(x) = \frac{a_k}{b_l} x^{k-l} = \sum_{i=0}^{l} b_i \frac{a_k}{b_l} x^{k-l} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{l} b_i \frac{a_k}{b_l} x^{i+k-l} = a_k x^k + \ldots$$

P (x) $= \dfrac{a_k}{b_l} x^{k-l} \quad \rightarrow \quad Q(x) = P_1(x)$

$\Rightarrow$ grad (P_1(x) $\leq k-1$

Ist grad(Q) = l = k, setze:

P_1(x) = R(x) $\qquad \dfrac{a_k}{b_l} x^{k-l} = S(x)$

Ist grad(Q) = l < k

wiederhole den Vorgang mit $P_1(x)$ anstelle von P(x)
Da in jedem Schnitt der Grad des Polynoms $P_1(x)$ um wenigstens 1 abnimmt, endet das Verfahren.

<u>Beispiel:</u>

$P(x) = 6x^3 + 4x^2 + 12$
$Q(x) = 4x^2 + x + 1$

$$(6x^3 + 4x^2 + 12) : (4x^2 + x + 1) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$$

$$\begin{array}{l}
-(6x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x) \\
\hline
\quad \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 12 \\
-(\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{5}{8}) \\
\hline
-\frac{17}{8}x + \frac{91}{8}
\end{array}$$

$$\overbrace{6x^3 + 4x^2 + 12}^{\Rightarrow P(X)} = Q(x)$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{8}\right)}_{=S(X)} \quad \overbrace{\left(4x^2 + x + 1\right)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{17}{8}x + \frac{91}{8}\right)}_{=R(X)}$$

Nullstellen:

Eine komplexe Zahl z heißt Nullstelle eines Polynoms P(x), falls gilt P(z) = o
Sei a eine Nullstelle von P(x) dann gilt:

$P(x) = S(x) \cdot (x - a)$

Beweis: Division von P durch Q = (x – a) mit Rest heißt:

$P(x) = S(x) \cdot (x - a) + R(x)$ mit Grad(R(x)) < 1

Da a Nullstelle ist gilt:

$0 = P(a) = \int (a)(a-1) + R(a) = R(a)$

Folgerung:

(1) Ein Polynom x-ten Grades hat $\leq$ x Nullstellen
(2) Sind $a_1, \ldots, a_r$ Nullstellen von P(x) so gilt:

$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r) \int (x)$

Ist a Nullstelle von P(x) so heißt (x-a) ein Linearfaktor von P

Die größte Potenz m für die gilt $P(x) = (x-a)^m S(x)$ heißt Vielfachheit der Nullstelle a.

Es gilt also:

Summe der Vielfachheiten der Nullstellen von P(x) $\leq$ grad P(x)

Fundamentalsatz der Algebra:

Ist P(x) ein Polynom vom Grad k , dann existieren komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ so, dass $P(x) = (x - a_1)^{m_1} \ldots\ldots (x - a_2)^{m_2} \ldots\ldots (x - a_r)^{m_r}$ *und* $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$

2. Lineare Algebra

2.1. Lineare Gleichungssysteme (LGS I)

Beispiele:

Beispiel a:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

1. Lösungsvariante

$y = 4 - 3x$ ….einsetzen in 2.Gleichung

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2x + 2(4-3x) &= 4 \\ 2x + 8 - 6x &= 4 \\ -4x &= -4 \\ \underline{x} &\underline{= 1} \end{aligned}$$

$y = 4 - 3 \cdot 1 \quad = 1$

2. Lösungsvariante

$$\begin{array}{lr|l}
3x + y & = 4 & \cdot \frac{1}{3} \\
2x + 2y & = 4 & \\
\hline
x + \frac{1}{3}y & = \frac{4}{3} & (-2) \\
2x + 2y & = 4 & \\
\hline
x + \frac{1}{3}y & = \frac{4}{3} & \\
\frac{4}{3}y & = \frac{4}{3} & \frac{3}{4} \\
\hline
x + \frac{1}{3}y & = \frac{4}{3} & (-\frac{1}{3}) \\
y & = 1 & \\
\hline
x & = 1 & \\
y & = 1 & \\
\hline
\end{array}$$

Beispiel b:

$$\begin{aligned} -x + 2y + 5z &= 6 \\ x + 3y - z &= 3 \\ 5y + 4z &= 9 \end{aligned}$$

Beispiel c:

$$\begin{aligned} -x + 2y + 5z &= 6 \\ x + 3y - z &= 3 \\ 5y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

Simultane Lsg. der LGS´s aus den Beispielen b und c

			b	c	
$-x$	$+2y$	$+5z$	$= 6$	$= 6$	(-1)
x	$+3y$	$-z$	$= 3$	$= 3$	
	$5y$	$+4y$	$= 9$	$= 4$	
x	$-2y$	$-5z$	$= -6$	$= -6$	(-1)
x	$+3y$	$-z$	$= 3$	$= 3$	
	$5y$	$+4z$	$= 9$	$= 4$	
x	$-2y$	$-5z$	$= -6$	$= -6$	
	$5y$	$+4z$	$= 9$	$= 9$	
	$5y$	$+4z$	$= 9$	$= 4$	
x	$-2y$	$-5z$	$= -6$	$= -6$	
	$5y$	$+4z$	$= 9$	$= 9$	$(\frac{1}{5})$ Beispiel c hat keine
			$0 = 0$	$= -5$	Lösung, da $0 \neq -5$
x	$-2y$	$-5z$	$= -6$		
	y	$+\frac{4}{5}z$	$= \frac{9}{5}$		2

Die Menge L_b aller Lösungen des LGS (b) hat die Gestalt:

$$L_b = \left\{ \left(-\frac{12}{5} + \frac{17}{5}z, \frac{9}{5} - \frac{4}{5}z, z \right) \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösungsmenge ist also unendlich!

Ein LGS mit m Gleichungen in n Variablen $x_1,\ldots,x_n$ hat die Gestalt:

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots\ldots+a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots\ldots+a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +m_2x_2 & +\ldots\ldots+a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}$$

Dabei sind die Koeffizienten a_{ij} reele (oder rationale, oder komplexe) Zahlen. Die rechten Seiten bi sind ebenfalls reelle (oder rationale, oder komplexe) Zahlen.

Eine Lösung eines LGS´s ist ein n-Tupel $(x_1,\ldots,x_n)$ reeller (oder rationale, oder komplexer) Zahlen mit der Eigenschaft, dass $x_1,\ldots,x_n$ alle m Gleichungen des LGS´s gleichzeitig erfüllen.

Die Menge aller Lösungen heißt die Lösungsmenge!

Wir betrachten drei Operationen O1, O2, O3

O1: Vertauschen zweier Gleichungen
O2: Multiplikation einer Gleichung mit einem von null verschiedenen Faktor
O3: Addiere das α -fache einer Gleichung zu einer anderen

Satz: Die Anwendung der Operationen O1, O2 und O3 auf ein LGS belassen die Lösungsmenge unverändert.

Beweisskizze:
Sei $(x_1,\ldots,x_n)$ eine Lösung eines LGS (1) und entstehe das LGS (2) durch Anwendung einer der Operationen O1, O2 oder O3 auf das LGS (1). Es ist leicht zu sehen, dass $(x_1,\ldots,x_n)$ auch die Lösung von (2) ist.

⇨ Um zu zeigen, dass auch jede Lösung von (2) wieder eine Lösung von (1) ist, reicht es zu beweisen, dass (2) durch die Anwendung einer geeigneten Operation O1, O2 oder O3 wieder in das LGS (1) übergeführt werden kann.

⇨ (1) Entsteht (2) durch Vertauschung zweier Gleichungen i und j an (1), so führt wiederholtes Vertauschen der Gleichungen i und j (2) wieder in (1) über (2). Entsteht das LGS (2) durch Multiplikation einer Gl. i mit einem Faktor $\beta \neq 0$, dann verwandelt Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{1}{\beta}$ das LGS (2) wieder in (1)

⇨ (3) Entsthet LGS (2) durch Addition des α -fachen der Gl. i zur Gl. j, dann geht LGS (2) durch Addition des (-α)-fachen der Gleichung i wieder in das LGS (1) über

⇨ Damit folgt: Jede Lösung des LGS (2) ist auch eine Lösung des LGS (1)

➔ **Lösungsmengen der LGS (1) und (2) sind gleich**

Tableaudarstellung eines LGS

$$
\begin{array}{lll|l}
a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

Ein LGS in Tableauform hat Stufenform, wenn es die folgende Gestalt hat:

$$
\begin{array}{l|l}
1 * \ldots * \quad 0 * \ldots * 0 * \ldots * 0 * \ldots * 0 * \ldots * & b_1 \\
0\ 0 \ldots 0 \quad 1 * \ldots * 0 * \ldots * 0 \quad \ldots * 0 * \ldots * & b_2 \\
\vdots\ \vdots \quad \vdots\ 0\ 0 \ldots 0\ 1 * \ldots * 0 \qquad \vdots & \\
\vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ 0 0 \ldots 0\ 1 \qquad \vdots & \\
\vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots \qquad 0 & \\
\vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots \qquad 1 * \ldots * & b_k \neq 0 \\
\vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots & \\
\vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots\ \vdots\ \vdots \quad \vdots & \\
0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \ldots 0 0 0 \ldots 0 &
\end{array}
$$

Beispiele:

$$
\begin{array}{lllllll}
1x_1+ & 2x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +3x_5 & +0x_6 & = 1 \\
0x_1+ & 0x_2 & +1x_3 & +0x_4 & +2x_5 & +0x_6 & = 2 \\
0x_1+ & 0x_2 & +0x_3 & +1x_4 & +1x_5 & +0x_6 & = 1 \\
0x_1+ & 0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & = 1
\end{array}
$$

Tableauform:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		……..Stufenvariablen
1	2	0	0	3	0	1	
0	0	1	0	2	0	2	
0	0	0	1	1	0	1	
0	0	0	0	0	1	1	

Man kann aus der Stufenform sofort die Lösungsmenge ablesen, indem man nach den Stufenvariablen auflöst:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_2 - 3x_5 \\ x_3 &= 2 - 2x_5 \\ x_4 &= 1 - 1x_5 \\ x_6 &= 1 \end{aligned}$$

Die „Nichtstufenvariablen“ x_2 und x_5 können beliebig gewählt werden.

Ein weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 1x_2 &= 2 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Tableauform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dieses LGS hat keine <u>Lösung</u>, da $0 \neq 1$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 10 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Alle Variablen sind Stufenvariablen. Das LGS hat genau eine Lösung:

$x_1=10$ $x_2=5$ $x_3=-2$

<u>Gauß – Jordan Verfahren (Algorithmus)</u>

Input: LGS mit m Gleichungen in n Variablen

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots\ldots+a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots\ldots+a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +m_2x_2 & +\ldots\ldots+a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Output: LGS in Stufenform, welches die gleiche Lösungsmenge wie das *Input*-System hat.

① Setze k=1 und SV = $\emptyset$

② Finde den kleinsten Index j so, dass ein Index i $\geq$ k existiert mit $a_{ij} \neq 0$
Gibt es keinen solchen Index, gehe zu ⑦
Andernfalls, setze j_k=k

③ Tausche Gl. i in die k-te Zeile

④ Multipliziere Gl. i mit $\frac{1}{a_{ij}}$

⑤ Für $l \in \{1, ..., m\}, \{i\}$ addiere das (-a_{li}) –fache der Gl. i zu Gl. l

⑥ Setze k=k+1, $SV \cup \{j_k\}$, gehe zu ②

⑦ Stop

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 0 & 2 & 16 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \quad (-2) \quad (-2)$$

$k=1$; $SV=\emptyset$

$j_1=1$; $i=1$; $a_{11}=1$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -2 & -1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |(-1) \\ \\ \end{array}$$

$k=2$; $SV=\{1\}$

$j_2=3$; $i=2$; $a_{23}=-1$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -2 & -1 & -10 \end{array}\right) \quad (-4) \quad (8)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 14 & -1 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |(-\frac{1}{6}) \end{array}$$

$k=3$, $SV=\{1,3\}$

$j_3=4$, $i=3$, $a_{34}=-6$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \quad (1) \quad (-4)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{3} \end{array}\right)$$

$k=4$, $S=\{1,3,4\}$

$$x_1=\frac{26}{3}-\frac{7}{3}x_5-\frac{1}{3}x_6-2x_2$$

$$x_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_5-\frac{1}{6}x_6$$

$$x_4=-\frac{11}{3}+\frac{7}{3}x_5-\frac{1}{6}x_6$$

Die Variablen x_2, x_5 und x_6 können beliebig gewählt werden. Für jede Wahl von x_2, x_5, x_6 erhalten wir eine spezielle Lösung.

Nach Abarbeitung des Gauß-Jordan Verfahren gelten folgende Aussagen:

(S1) $0 \le k-1 \le m$

(S2) $|SV| = k-1$

(S3) Es gilt $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ und $a_{ij_r} = \begin{cases} 1 & \text{sonst } i=r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(S4) Ist $i > k-1$, so gilt für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$: $a_{ij}=0$

Wir nennen s = k-1 die Stufenzahl des LGS. Eine Variable x_j ist genau dann eine Stufenvariable, wenn $j \in SV$.

Bemerkung:
Die Stufenzahl ist eindeutig bestimmt durch das *Input* – LGS. Die Menge der Stufenvariablen hängt davon ab, wie in Schritt ②der Index i gewählt wurde.

Hauptsatz über LGSe (1. Form)

Es seien $(*)$ ein LGS mit m Gleichungen in n Variablen und $(**)$ ein LGS, welche durch Anwendung des G.-J.-Algorithmus aus $(*)$ entsteht.

Die Stufenzahl sei s
Dann gilt:

(a) $(*)$ ist lösbar
$\Leftrightarrow b_i = 0$ für alle i mit $s < i \le m$

(b) $(*)$ hat genau eine Lösung
$\Leftrightarrow s = n$

Korollar: (……Zusatz)

Die Menge aller Lösungen von $(*)$ kann wie folgt dargestellt werden:

$$x_j = \begin{cases} \text{beliebig, wenn } j \in SV \\ bi = \sum\limits_{j \notin SV} a_{ij} x_{ij} \text{, wenn } j = j_i \end{cases}$$

Bemerkung:
Im obigen Beispiel wurde nur gesagt, dass die Nichtstufenvariablen beliebig gewählt werden können. Es hängt von der Aufgabenstellung ab, aus welchem Zahlenbereich (Körper) die Nichtstufenvariablen gewählt werden dürfen. I.A. erhält man zu verschiedenen Zahlbereichen verschiedene Lösungsmengen.

2.2. Matrizen und Vektoren

Es seien m,n $\in \mathbb{N}$ und K ein Zahlbereich (Körper)
(d.h. $K = \mathbb{Q}, K = \mathbb{R}, K = \mathbb{C}$)

Eine mxn – Matrix über K ist eine Abbildung x….heißt „mal“

$$A : \{1,...,m\} \, x \, \{1,...,n\} \to K$$

m heißt die Zeilenzahl und n die Spaltenzahl von A
anstelle von A(i,j) schreibt man meist a_{ij}

Matrizen werden durch rechteckige Schemata der Form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ dargestellt.

Die Menge aller mxn – Matrizen über K wird mit $K^{(m,n)}$ bezeichnet.

Beispiel:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \in \mathbb{Q}^{(23)}$$

Wiederhohlung: m,n $\in \mathbb{N}$

K *…Zahlbereich (Körper) d.h.*

$K = \mathbb{Q} \vee K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$

mxn – Matrix $A:\{1,...,m\{x\}1,...,n\} \rightarrow K$

Schreibweise: aij = A(i,j)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{(m,n)}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(2,3)} \subseteq \mathbb{R}^{(2,3)} \subseteq \mathbb{C}^{(2,3)}$

Bezeichnungen:

- Spaltenvektor (mit m Einträgen) *…(m,1) – Matrix*

  Schreibweise $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ *Bsp.:* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,1)} = \mathbb{R}^3$

  Wir identifizieren $\mathbb{R}^{(m,1)}$ *mit* $\mathbb{R}^m$ *und genauso*
  $\mathbb{C}^{(m,1)}$ *mit* $\mathbb{C}^m$ *und* $\mathbb{Q}^{(m,1)}$ *mit* $\mathbb{Q}^m$

- Zeilenvektor (mit n Einträgen) *…(1xn) – Matrix*

  Schreibweise $\underline{a} = (a_1,a_2,\dots a_n)$ *Bsp.:* $\underline{a} = (1,1,0,1) \in \mathbb{R}^{(1,4)}$

- quadratische Matrix (n-reihige quad. Matrix) *…mxn – Matrix*

  Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$

- Nullmatrix vom Format (m,n)

  $0_{m,n} \in K^{(m,n)} \mathit{mit}\ 0_{m,n}(i,j) = 0$

  Beispiel: $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Einheitsmatrix (n-reihige Einheitsmatrix)

$$I_n \in K^{(m,n)} mit\ I_n(i,j) = \begin{cases} 1, wenn\ i = j \\ 0, sonst \end{cases}$$

Beispiel: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung: *Wenn das Format aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch 0 oder I anstelle von* $0_{m,n}$ *und* I_n

Spalten und Zeilenvektoren einer Matrix $A \in K^{(m,n)}$

= a_j = (A (i,1), A (i,2), …, A (i,n)), $\qquad i \in \{1,...,n\}$

i-te Zeilenvektor von A

$$= a_j = \begin{pmatrix} A(1,j) \\ A(2,j) \\ \vdots \\ A(m,j) \end{pmatrix} \qquad i,j \in \{1,...,n\}$$

j-te Spaltenvektor von A

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a_1} = (1,2,3) \quad \underline{a_2} = (0,1,-1)$$

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir vereinbaren die folgende Schreibweise:

Es seien $A \in K^{(m,n)}$ und $B \in K^{(m,l)}$ Dann bezeichne (A/B) $\in K^{(m,n+l)}$

die Matrix (A/B) (i,j) = $\begin{cases} A(i,j), wenn\ j \le n \\ B(i,j-n), wenn\ n+1 \le j \le n+l \end{cases}$

Entsprechend:

$A \in K^{(m,n)}$ und $B \in K^{(p,n)}$ dann sei $\left(\frac{A}{B}\right) \in K^{(m+p,n)}$ definiert durch

$$\left(\frac{A}{B}\right)(i,j) = \begin{cases} A(i,j) \; wenn \; 1 \le i \le m \\ \\ B(1, j-m) \; wenn \; m+1 \le i \le m+p \end{cases}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)}$$

$$(A/B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Insbesondere gilt $A = \left(\vec{a_1} \mid \vec{a_2} \mid \ldots \mid \vec{a_n}\right) = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \_\_ \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \in K^{(m,n)}$

Matrixoperationen:

(a) Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl (Skalar)
$A \in K^{(m,n)}, \alpha \in K$

durch: $(\alpha A)(i,j) := \alpha A(i,j)$

(b) Addition zweier Matrizen
$A, B \in K^{(m,n)}$, $A, B \in K^{(m,n)}$ ist definiert

durch: (A+B)(i,j):= A (i,j) + B (i,j)

Bemerkung: *Die Summe A+B ist nur erklärt, wenn A und B die gleiche Zeilen- und Spaltenzahl haben.*

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,3}$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften: Für alle $A, B \in K^{(m,n)}$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

(1) A + B = B + A *(Kommutativität – Addition)*

(2) A + (B + C) = (A + B) + C *(Assoziativität der Addition)*

(3) $A + 0_{m,n} = A$

(4) $A + (-1)A = 0_{m,n}$

(5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(6) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha A$

(7) $(\alpha, \beta) A = \alpha(\beta A)$

(8) 1A = A

Bemerkung: *Wir schreiben –A anstelle von (-1)A*

(c) Matrixmultiplikation

$A \in K^{(m,p)}$; $B \in K^{(p,n)}$ $\quad A \in K^{(m,n)}$ ist definiert durch

$$(AB)(i,j) := \sum_{l=1}^{p} A(i,l)B(l_{ij})$$

Bemerkung: *$A \cdot B$ ist nur dann erklärt, wenn die Spaltenzahl von mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt. Im Allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$*

Ist A = $\begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \\ \underline{\quad} \\ \underline{a_m} \end{pmatrix}$ und B = $\left(\overrightarrow{b_1} \,|\, \overrightarrow{b_2} \,|\, \ldots \,|\, \overrightarrow{b_n}\right)$

Dann gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \underline{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \ldots & \underline{a}_1 \cdot \vec{b}_n \\ \underline{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \underline{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \underline{a}_2 \cdot \vec{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \underline{a}_n \cdot \vec{b}_1 & \underline{a}_n \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \underline{a}_n \cdot \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$$

$$\underline{a} = (1,2,0,0,1), \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \cdot \mathbb{R}^{(5,1)}$$

$$\underline{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}^{(1,1)} = \mathbb{R}$$

$$\underline{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 3$$

$\vec{b} \cdot \underline{a} \in \mathbb{R}^{(5,5)}$

$$\vec{b} \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 12 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \underline{a} \cdot \vec{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)}$$

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ *…ist definiert*

$\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$ *…ist nicht definiert*

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

(9) $(A+B) \cdot C = AC + BC$ für $A,B \in K^{(m,p)}$ und $C \in K^{(p,n)}$

$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ für $A \in K^{(m,p)}$ und $B,C \in K^{(p,n)}$

(10) $\alpha (A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$
für $A \in K^{(m,p)}$ $B \in K^{(p,n)}$ und $\alpha \in K$

(11) $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$
für $A \in K^{(m,p)}$ $B \in K^{(p,l)}$ $C \in K^{(l,n)}$

(12) $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$ für $A \in K^{(m,n)}$

(d) Transposition

$A \in K^{(m,n)}$ $A^T \in K^{(m,n)}$ ist definiert durch
$A^T(i,j) = A(j,i)$

A^T heißt die zu A transponierte Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,3)}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,2)}$$

Eigenschaften:

(13) $(A+B)^T = A^T + B^T$ für $A,B \in K^{(m,n)}$

(14) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ für $A \in K^{(m,n)}$ $B \in K^{(p,n)}$

(15) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ für $A \in K^{(m,n)}$ und $\alpha \in K$

(16) $(A^T)^T = A$ für $A \in K^{(m,n)}$

Eine Matrix A heißt Symmetrisch, wenn $A^T=A$
A heißt schiefsymmetrisch, wenn $A^T=-A$
Offenbar ist jede symmetrische oder schiefsymmetrische Matrix quadratisch.

2.3. Lineare Gleichungssysteme II

Wir betrachten ein LGS mit m Gleichungen in n Variablen $x_1,\ldots,x_n$

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots\ldots+a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots\ldots+a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots\ldots+a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Sei $A \in K^{(m,n)}$ mit $A(i,j)=a_{ij}$

Ferner seien $\vec{b}$ der Spatvektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ und $\vec{x}$ der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Das LGS kann nur in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ geschrieben werden.

Beispiel:

$1x_1-1x_2+2x_3+1x_4=3$

$2x_1-1x_2-3x_3+3x_4=1$

$1x_1+0x_2-4x_3+1x_4=-2$

in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Wir betrachten nun ein LGS'e der folgenden Form: AX = B

mit: $A \in K^{(m,n)}; X \in K^{(n,p)}; B \in K^{(m,p)}$

Dabei seien A,B gegeben und X gesucht!

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

AX = B $\qquad \vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \qquad \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2$

$$A\left(\vec{x}_1 \middle| \vec{x}_2\right) = \left(\vec{b}_1 \middle| \vec{b}_2\right) \Leftrightarrow A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \text{ und } A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$$

Anwendung des Gauß-Jordan Verfahrens auf LGS'e der Form AX=B

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$

Darstellung in Tableauform:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11}a_{12}\dots a_{1n} & & & b_{11}\dots b_{1p} \\
a_{21}a_{22}\dots a_{2n} & & & b_{21}\dots b_{2p} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & & & \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} & & & b_{m1}\dots b_{mp}
\end{array}
$$

Durch Anwendung des Gauß-Jordan Verfahrens auf dieses Tableau erhält man ein Tableau der Form:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1*\dots* & 0*\dots* & 0*\dots* & 0*\dots* & & 0*\dots* & b_{11}\dots b_{1p} \\
0\;0\dots0 & 1*\dots* & 0*\dots* & 0 & & \dots*0*\dots* & \\
\vdots\;\vdots\;\vdots & 0\;0\dots0 & 1*\dots* & 0 & & \vdots & \\
\vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & 00\dots0 & 1 & & \vdots & \\
\vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots & 0 & & \\
\vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots & 1*\dots* & & b_{s1}\dots b_{sp} \\
\vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots & & & b_{s11,1}\dots b_{s11,p}
\end{array}
$$

Das LGS AX = B hat eine Lösung $X \in K^{(n,p)}$ genau dann, wenn jedes der p LGS

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1, \dots, A\vec{x}_p = \vec{b}_p$$

eine Lösung hat. Durch Anwendung des Hauptsatzes über LGS *(Abschn. 2.1)* erhält man:

- AX = B hat eine Lösung genau dann, wenn $b_{ij} = 0$
  für alle $s+1 \le i \le m$ *und alle* $1 \le j \le p$.
- AX = B hat eine eindeutig bestimmte Lösung X genau dann, wennn s=n=m

Dabei ist **s** die Stufenzahl!

Beispiel:

$$
\begin{array}{rrrr|rr}
1 & -1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\
2 & -1 & -3 & 3 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 4 \\
\hline
1 & -1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\
0 & 1 & -7 & 1 & -5 & 7 \\
0 & 1 & -6 & 0 & -5 & 7 \\
\hline
1 & 0 & -5 & 2 & -2 & 4 \\
0 & 1 & -7 & 1 & -5 & 7 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 4 \\
0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 7 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array}
$$

(-2) (-1)

(1) (-1)

(4) (5)

Stufenzahl: s = 3
Stufenindizes: 1,2,3

$x_{11}=3x_{41}-2$ $\quad$ $x_{12}=3x_{42}+4$
$x_{21}=6x_{41}-5$ $\quad$ $x_{22}=6x_{42}+7$
$x_{31}=1x_{41}$ $\quad$ $x_{32}=1x_{42}$

$$
X=\begin{pmatrix} 3x_{41}-2 & 3x_{42}+4 \\ 6x_{41}-5 & 6x_{42}+7 \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}
$$

hier wurde $x_{41}=\alpha$ *und* $x_{42}=\beta$ *gesetzt* $\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

die Menge aller Lösungen des LGS:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}
$$

hat die Gestalt:

$$
L=\left\{ \left. \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) + \beta \left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \;\right|\; \alpha,\beta\in\mathbb{R} \right\}
$$

insbesondere gilt für $\alpha, \beta = 0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{=:\,B}$$

daraus folgt:

$$A\left(\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$= \cancel{B} + \alpha A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta B \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{B}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta B \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O_{3,2} \textit{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

mit $\alpha = 1$ & $\beta = 0$ folgt:

$$A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = O_{3,2}$$

und mit $\alpha = 0$ & $\beta = 1$ folgt:

$$A \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O_{3,2}$$

Ein LGS heißt *homogen*, wenn B = 0 andernfalls heißt AX = B *inhomogen*.

Ist AX = B ein LGS, so heißt das LGS AX = O das dazugehörige homogene LGS.

Struktur der Menge der Lösungen eines LGS

Sei AX = B ein LGS und $L=\{X \mid AX=B\}$ die Menge aller Lösungen.
Ferner sei $L_{\text{hom}}=\{X \mid AX=O\}$ die Menge aller Lösungen des zugehörigen homogenen LGS.

Dann gilt:

- Sind $X_1, X_2, \in L_{\text{hom}}$ *und* $\alpha, \beta \in K$. Dann ist $\alpha X_1+\beta X_2 \in L_{\text{hom}}$.

$$X=\begin{pmatrix} 3x_{41}-2 & 3x_{42}+4 \\ 6x_{41}-5 & 6x_{42}+7 \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$$

Struktur der Menge aller Lösungen eines LGS´s

Ein LGS AX = B heißt homogen, wenn B = O, andernfalls inhomogen

Ist AX = B ein LGS, so heißt AX = O das zugehörige homogene LGS.

Satz: Es sei AX = B ein LGS mit $A \in K^{(m,n)}$, $X \in K^{(n,p)}$ *und* $B=K^{(m,p)}$
Dann gilt:

① Sind $X_1, X_2 \in K^{(n,p)}$ Lösungen von AX = O,
dann ist auch $\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2$ eine Lösung von AX = O
für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

② Sind $X_1, X_2 \in K^{(n,p)}$ Lösungen von AX = B,
dann ist auch X_1-X_2 eine Lösung des dazugehörigen LGS AX = O

③ Ist X_1 eine Lösung von AX = B und X_2 eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS AX = O, dann ist X_1+X_2 eine Lösung von AX = B

Beweis:

(1.) $AX_1+AX_2=O$

$$A(\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2)=A(\alpha_1 X_1)+A(\alpha_2 X_2)$$
$$=\alpha_1 AX_1+\alpha_2 AX_2=\alpha_1 O+\alpha_2 O$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)O=O$$

(2.) $AX_1 + AX_2 = B$
$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O$$

(3.) $AX_1 = B$, $AX_2 = O$
$$A(X_1 - X_2) = AX_1 + AX_2 = B + O = O$$

Folgerung: Ist $L_{\text{hom}} = \left\{X \in K^{(n,p)} \mid AX = O\right\}$ die Menge aller Lösungen des zugehörigen LGS und ist $Y \in K^{(n,p)}$ eine beliebige Lösung von AX = B, dann ist $L = \left\{X + Y \in K^{(n,p)} \mid X \in L_{\text{hom}}\right\}$
die Menge aller Lösungen von AX = B

Invertierbare Matrizen

Es sei $A \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. A heißt invertierbar (oder regulär), wenn eine Matrix $B \in K^{(n,n)}$ so exisiert, dass gilt:

$$BA = AB = I_n$$

In diesem Fall heißt B die Inverse von A, und man schreibt $B = A^{-1}$.

Eigenschaften der inversen Matrix

Es seien $A, B \in K^{(n,n)}$ invertierbare Matrizen und $\alpha \in K \setminus \{0\}$. Dann gilt:

① αA ist invertierbar und $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

② Die Matrix AB ist invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

③ Die Matrix A^T ist invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

④ Die Matrix A^{-1} ist invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$

⑤ I_n ist invertierbar und $(I_n)^{-1} = I_n$

Beweis:

(1.) $$(\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha} A^{-1}\right) = \frac{\alpha}{\alpha} AA^{-1} = I_n$$
$$\left(\frac{1}{\alpha} A^{-1}\right)(\alpha A) = \frac{\alpha}{\alpha} A^{-1}A = I_n$$

(2.) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

(3.) $(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$

$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$

(4.) $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

(5.) $I_nI_n = I_n$

<u>*Satz:*</u> *…Existenz und Eindeutigkeit der inversen Matrizen*

Es sei $A \in K^{(n,n)}$ dann gilt:

① Wenn es Matrizen $B,C \in K^{(n,n)}$ so gibt, dass gilt:

$BA = AC = I$, dann ist $B = C$

② Wenn es eine Matrix $B \in K^{(n,n)}$ so gibt, dass

$AB = I_n$, dann gilt auch $BA = I_n$

③ A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{o}$
genau die Lösung $\vec{x} = \vec{o}$ hat.

<u>Beweis:</u>

(1.) $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC \underline{= C}$

(2.) <folgt>

(3.) $\boxed{\Leftarrow}$ <folgt>

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei A invertierbar.

$A\vec{x} = \vec{o}$ Durch Multiplikation mit A^{-1} von hinten
$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{o} = \vec{o} \Rightarrow \vec{x} = \vec{o}$

<u>Berechnung der inversen Matrix</u>

Sei $A \in K^{(n,n)}$
Es reicht aus, zur Berechnung der Inversen A^{-1} die Gleichung
$AX = I_n$ zu betrachten

Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(3,3)}$$

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Tableauform:

1	2	-1	1	0	0	(-2)
1	3	-1	0	1	0	
2	5	-3	0	0	1	(-1)

1	2	-1	1	0	0
0	1	0	-1	1	0
0	1	-1	-2	0	1

1	0	-1	3	-2	0	
0	1	0	-1	1	0	
0	0	-1	-1	-1	1	| (-1)

1	0	-1	3	-2	0	
0	1	0	-1	1	0	(1)
0	0	1	1	1	-1	

1	0	0	4	-1	-1
0	1	0	-1	-1	0
0	0	1	1	1	-1

2.4. Lineare Vektorräume

Es sei K wieder ein Zahlbereich, also $K = \mathbb{Q} \quad oder\ K = \mathbb{C} \quad oder\ K = \mathbb{R}$

Def.: Eine nicht leere Menge V, in der zu je zwei Elementen a,b, $\in V$ eine Summe a+b $\in V$ und jeder Zahl $\alpha = K$ ein Vielfaches αa erklärt ist, heißt Vektorraum über K, wenn folgende Bedeutungen erfüllt sind:

(V1) a+b = b+a $\forall$ a,b $\in V$

(V2) a+(b+c) = (a+b) +c $\forall$ a,b,c $\in V$

(V3) Es gibt ein Element o $\in V$ mit der Eigenschaft, dass a+o=a $\forall$ a $\in V$

(V4) Zu jedem a $\in V$ existiert genau ein b $\in V$ so, dass a+b=o

(V5) 1a=a $\forall$ a $\in V$

(V6) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \qquad \forall \alpha, \beta \in K$
$\forall$ a $\in V$

(V7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall\ a \in V$

(V8) $\alpha(a+b) = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha \in K \quad \forall\ a, b \in V$

Bemerkungen:

- (V3) impliziert sogar, dass o eindeutig bestimmt ist.
  Angenommen, es sind zwei Elemente u,v $\in V$ so, dass
  a+n = a+v = a $\forall$ a $\in V$
  ⇨ u = u+v = v+u = v => Widerspruch !

- $\forall$ a $\in V$ gilt oa = o
- a+b=o ⇔ b = (-1)a = : a

Die Elemente eines Vektorraumes (VR) heißen Vektoren.

Beispiele für Vektorräume:

(1.) $K^{(m,n)}$ ist ein VR über K mit Addition = Matrixaddition

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

insbesondere sind also:

$$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2{}_1 \,....VR'e\ \text{über}\ \mathbb{R}$$

(2.) Sei $A \in K^{(n,n)}$
Dann ist die Lösungsmenge des homogenen LGS´s A $\vec{x} = \vec{o}$
VR ein über K

(3.) Es sein
$\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k} \quad \in \mathbb{R}^n$
die Menge
Span $\left\{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}\right\} = \left\{\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{a_k} \mid \begin{matrix} \alpha_1, ..., k_n \\ \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\}$
ist ein VR über $\mathbb{R}$

Def: ***Es sei V ein VR über K***

Sind a1,…ak Vektoren aus V $\alpha_1, ...\alpha_k \in K$, dann heißt $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k$

<u>Linearkombination</u> (LK) über K

Eine nicht leere Teilmenge $M \leq V$ ist ein linearer Unterraum (UR) von V, falls gilt:

(U1) $a \in M,\ \alpha \in K \ \Rightarrow \alpha, a \in M$
(U2) $a, b \in M \ \Rightarrow \ a + b \in M$

Bemerkung:

Ist $U \subseteq V$ ein UR, so ist U selbst ein VR über K mit den gleichen Operationen $+, \cdot$ wie in V

triviale Unterräume von V:
$U_1=\{0\}$
$U_2=V$

Eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist <u>linear abhängig</u>, wenn es

Vektoren: $a_1, ...a_k \in M$ und
Zahlen: $\alpha_1, ..., \alpha_k \in K \setminus \{o\}$ so gibt,
das: $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0$

Andernfalls heißt M linear unabhängig

Bemerkung:

- Ist $M \subseteq V$ linear unabhängig und $M' \subseteq M$ so ist M´ linear unabhängig
- {0} ist linear abhängig
- $\{a_1,...a_n\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$

$\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0$ hat nur eine Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$

- Wir definieren für $M \subseteq V \quad M \neq \emptyset$

$$\mathrm{Sp_{an}}(M) = \left\{ \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_1 a_1 \mid \begin{matrix} a_1,...a_k \in M \\ \alpha_1,...,\alpha_k \in K \end{matrix} \right\}$$

$\mathrm{Sp_{an}}(M)$ heißt der von M erzeugte (aufgespannte/induzierte) UR.

- Ist für $M \subseteq V$ Span(M) = V, so heißt M Erzeugendensystem von V
- Ist M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem so nennt man M Basis von V

1. Beispiel:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ M_1 ist linear abhängig

M_1 ist kein Erzeugendensystem von V d.h.

Span(M_1) $\neq \mathbb{R}^3$ da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Span(M)$

Annahme:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 = 1$$
$$0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \quad (-1) \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = -1 \quad ...\textit{Widerspruch}$$

<u>*2. Beispiel*</u>

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

⇨ M_2 ist linear unabhängig

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}$$

⇨ M_2 ist ein Erzeugendensystem, d.h. jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich als LK darstellen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇨ M_2 ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis von $\mathbb{R}^3$

<u>Satz:</u> Es sei V ein VR über K

(a) Ist B eine endliche Basis von V, so kann jeder Vektor aus V auf genau eine Weise als LK der Vektoren in B dargestellt werden

(b) Sind B_1 und B_2 zwei (endliche) Basen von V, so ist $|B_1| = |B_2|$

Beweis:

(a) B ist eine Basis aus V
$B = \{b_1,\dots,b_k\}$
Dann gibt es zu $a \in V$ $\alpha_1,...,\alpha_k \in K$ mit
$a = \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_k\beta_k$

Angenommen, es gelte:
$a = \beta_1\beta_1 + ... + \beta_k\beta_k \quad mit \beta_1, \beta_k \in K$
und es sei z.b. $\alpha_1 \neq \beta_1$

0 = a+(-1)a = $\alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_k\beta_k$ +(-1) $\beta_1\beta_1 + ... + \beta_k\beta_k$

0 = $(\alpha_1 - \beta_1)$ b_1 + … + $(\alpha_k - \beta_k)$ b_k

$\Rightarrow B = \{b_1,...,b_k\}$ ist linear abhängig

(b) $B_1 = \{a_1,\dots,a_k\}$
$B_2 = \{b_1,\dots,b_k\}$

Annahme l > k ($|B_2| > |B_1|$)

Jeder Vektor $b_1,\dots,b_l \in B_2$ kann als LK aus B_1 dargestellt werden

⇨ $b_i = \alpha_{1i}a_1 + ... + \alpha_{ki}a_k$ (i=1,…,l) (*)

Wir betrachten $c \in V$ mit:

c= $\beta_1 b_1 + ... + \beta_l b_l = \gamma_1 a_1 + ... + \gamma_k a_k$

⇨ durch einsetzen von (*) erhält man:

$$
\begin{aligned}
c \quad &= \beta_1(\alpha_{11}a_1 + ... + \alpha_{k1}a_k) \\
&+\beta_2(\alpha_{12}a_1 + ... + \alpha_{k2}a_k) \\
&\vdots \\
&+\beta_l(\alpha_{1l}a_1 + ... + \alpha_{kl}a_k) \\
\\
&= \gamma_1 a_1 + ... + \gamma_k a_k
\end{aligned}
$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{l} \beta_2 \alpha_{1j} \right) a_1 + ... + \left(\sum_{j=1}^{l} \beta_j \alpha_{kj} \right) a_k$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$= \quad \gamma_1 \cdot a_1 \quad + \quad \gamma_k \cdot a_k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_l \end{pmatrix}$$

⇨ bestimmt durch $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_l \end{pmatrix}$

⇨ Damit hat das LGS genau eine Lösung

- in *Tableauform* entstehen genau l Stufen
- Wir haben k Zeilen und l Stufen $k \geq l$ => Widerspruch!

Ein VR V heißt endlich erzeugt oder endliche dimensional wenn V ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Also: V ist endlich erzeugt $\Leftrightarrow \exists\, M \subseteq V$:

- M ist endlich
- V = Span (M)

Def.: Ist V ein endlich erzeugter VR über K, dann heißt die Mächtigkeit einer Basis von V, die Dimension von V

Man schreibt: dim (V)

Beispiel:

- $V = \mathbb{R}^3$ $\quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

V = Span (B) $\Leftrightarrow \cancel{V} \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \exists B \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

so, dass $\quad \vec{c} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{c}$ sei $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

dann gilt: $\vec{c} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

⇨ B ist <u>linear unabhängig</u> !

<u>Beweis:</u>

sei $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad I_3 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow$ <u>B ist linear unabhängig</u>

B ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$ den ($\mathbb{R}^3$) = | B | = 3

- $V = \mathbb{R}^n$

  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

  Bist Basis von $\mathbb{R}^n$ => denn ($\mathbb{R}^n$)=n

- nicht alle VR'e sind endlich erzeugt:

  $V = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$
  = Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist ein VR über $\mathbb{R}$ mit:

=> $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
=> $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

wobei f,g $\in V, \alpha \in \mathbb{R}$

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ g_k \mid g_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & x = \alpha \\ 0 & sonst \end{pmatrix} \right\}$$

M ist linear unabhängig und unendlich => V ist nicht endlich erzeugt

<u>Hilfssatz:</u>

Es sei V ein VR über K und $M \subseteq V \setminus \{0\}$ eine endliche Menge von Vektoren. Dann gilt M ist linear unabhängig.

$\Leftrightarrow \cancel{V} a \in M \qquad a \notin Span\left(M \setminus \{a\}\right)$

<u>Beweis:</u>

Wir zeigen:

$\neg(M \text{ ist linear unabhängig})$
$\Leftrightarrow$
$\neg\left(Va \in M;\, a \notin Span\left(M \setminus \{a\}\right)\right)$
$d.h$
M *ist linear abhängig*
$\Leftrightarrow \exists \in M:\ a \in Span\left(M \setminus \{a\}\right)$
$\boxed{\Rightarrow}$ M *ist linear abhängig*
$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$
$mit\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K \setminus \{0\}$
$und\ a_1, \ldots, a_k \in M$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k\right)$$

$$\Rightarrow a_1 \in Span\left(M \setminus \{a_1\}\right)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad$ $Sei\ a \in Span\left(M \setminus \{0\}\right)$

$$\Rightarrow a = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k$$

$mit \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$

$und \quad b_1, \ldots, b_k \in M \setminus \{a\}$

Da a $\neq 0$, ist mindestens ein $\alpha_i \neq 0$ (ohne Beschreibung der Allgemeinheit)
o.B.d.A. sei $\alpha_1 \neq 0$

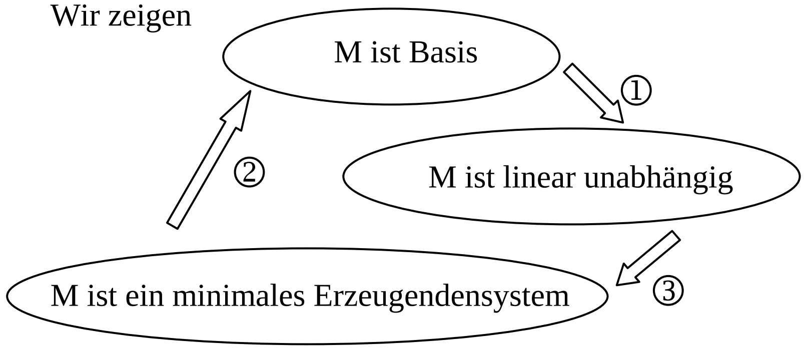
⇨ $0 = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k - 1a$
⇨ M ist linear abhängig (Beweis des Hilfssatzes)

Satz: Es sei V ein VR über K und $M \subseteq V$ dann gilt:

M ist Basis ⇔ M ist maximale linear unabhängige Menge
⇔ M ist ein minimales Erzeugendensystem

Beweisskizze:

Wir zeigen



① M ist Basis

⇨ M ist linear unabhängig und V = Span (M)
⇨ $\cancel{V} a \in V \setminus M \quad a \notin Span(M)$

Anwendung des Hilfssatzes:

auf $M \cup \{a\}$ *und a*
zeigt $M \cup \{a\}$ ist linear abhängig

⇨ M ist maximal linear unabhängig

② und ③ können mit ähnlichen Schlüssen gezeigt werden!

2.5. Zeilen –und Spaltenraum, Rang einer Matrix

Es sei $A \in K^{(m,n)}$ mit A= $\left(\overrightarrow{a_1} \mid \overrightarrow{a_2} \mid ,,, \mid \overrightarrow{a_n}\right)$ = $\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \hline \\ \hline \underline{a}_m \end{pmatrix}$

Der Zeilenraum von A ist: Span $\left\{\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}\right\} \subseteq K^{(1,n)}$

Offenbar ist der Spalten –und Zeilenraum endlich erzeugt.
Wir setzen:

Zeilenrang (A)	= dem Zeilenraum
Spaltenraum (A)	= dem Spaltenraum

Anwendung auf LGS:

Wir betrachten ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ (*) dann gilt:

(*) hat eine Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

$\Leftrightarrow \vec{b} \in Span\left(\vec{a}_1,...,\vec{a}_n\right)$ = Spaltenraum A

$$\Leftrightarrow Srg.(A) = Srg.(A \mid b)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{A\vec{x} = \vec{b}_1}_{\text{ist lösbar !}}$ etwa $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Spaltenraum von A

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

=> $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

⇘Da Stufenzahl A = 2 folgt $A\vec{x} = \vec{b}_2$ hat keine Lösung!

=> $\vec{b}_2$ nicht im Spaltenraum von A

Wiederholung:

$$A = \left(\overrightarrow{a_1} \mid \overrightarrow{a_2} \mid \cdots \mid \overrightarrow{a_n}\right) = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \vdots \\ \overline{g_m} \end{pmatrix}$$

Spaltenraum = SR = Span$\left(\left\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\right\}\right)$

Zeilenraum = ZR = Span $\left(\left\{\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_m}\right\}\right)$

Spaltenrang = srg (A) = dim (SR)

Zeilenrang = zrg (A) = dim (ZR)

Zeilen –und Spaltenrang einer Stufenmatrix:

```
        1 * . . . * 0 * . . . * . . . 0 * . . . *
        0 0 . . . 0 1 * . . . * . . . 0 . . . . .
        0 0 . . . 0 0 0 . . . 0 . . . 0 . . . . .
        . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
        . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
        . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
A  =    . . . . . . . . . . . . . . . 0 . . . . .
        . . . . . . . . . . . . . . . 1 * . . . *
        . . . . . . . . . . . . . . . 0 0 . . . 0
        . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
        . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
        0 0 . . . 0 . . . . . . . . . 0 0 . . . 0
```

Es gilt:

(1) Die zu den Stufenindizes gehörenden Spaltenvektoren von A bilden eine Basis des Spaltenraumes von A

(2) Spaltenrang von A = srg (A) = Stufenzahl

(3) Zeilenrang von A = zrg (A) $\leq$ Stufenzahl

(4) Die ersten s (Stufenzahl) Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig

(5) Zeilenrang = Stufenzahl

Für Stufenmatrizen gilt: Spaltenrang = Zeilenrang

Satz:

Für jede Matrix $A \in K^{(m,n)}$ gilt: srg (A) = zrg (A)

Beweisskizze:

Durch Anwendung der Operationen

O1: Vertauschen zweier Zeilen

O2: Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$

O3: Addition eines Vielfachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile

kann jede Matrix A in eine Stufenmatrix A' übergeführt werden. Genauso kann A' durch schrittweise Anwendung von O1, O2, O3 wieder in A transformiert werden.

$$A \underset{\rightleftarrows}{0_i} \cdots \underset{\rightleftarrows}{0_i} A'$$

Da für die Stufenmatrix A' gilt: srg (A) = zrg (A') genügt es zu sagen, dass O1, O2, O3 jeweils den Zeilen –und Spaltenrang nicht ändern.

Der Rang rg (A) einer Matrix A ist definiert durch rg (A) = srg (A) = zrg (A)

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
2 & 6 & -1 & \frac{1}{2} \quad 1 \\
1 & 4 & 1 & \quad (-3) \\
3 & 10 & 0 & \\
\hline
1 & 3 & -\frac{1}{2} & \\
0 & 1 & \frac{3}{2} & (-3) \\
0 & 1 & \frac{3}{2} & (-1) \\
\hline
1 & 0 & -5 & \\
0 & 1 & \frac{3}{2} & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Stufenzahl = 2 = rg (A)

Stufenindizes; 1,2

Die LGS´e $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

haben den gleichen Lösungsraum.

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

<u>Also gilt:</u> Sind die Vektoren mit den Indizes 1 und 2 in der Stufenmatrix A' linear unabhängig, dann sind auch die entsprechenden Spaltenvektoren von A linear unabhängig.

2	4	-6	2	0	$\frac{1}{2}$	(-1) (-2)
1	3	2	4	0		
2	5	-3	7	0		
1	2	-3	1	0		
0	1	5	3	0		(-2)
0	1	3	5	0		(-1)
1	0	-13	-5	0		
0	1	5	3	0		(13)
0	0	-2	2	0	$-\frac{1}{2}$	(-5)
1	0	0	-18	0		
0	1	0	8	0		
0	0	1	-1	0		

$x_1 = 18x_4$

$x_2 = -8x_4$ $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 18x_4 \\ -8x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; x_4 \in \mathbb{R}$

$x_3 = x_4$

$$\underline{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \qquad = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von L, da jeder Vektor ein L Vielfaches von $\left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist.

Ist $\left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig?

⇨ nach Definition gilt: $\left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig

$\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad \alpha \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt aber:

$$\alpha \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von L

$\Rightarrow$ dim L = 1

= Anzahl der Nichtstufenvariablen

= 4 – Stufenzahl

= 4 – rg (A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad (-1) \quad (-2)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad (-1)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Stufenzahl = 2
$\Rightarrow$
rg (A) = 2

$x_1 = -3x_3 - x_4$
$x_2 = x_3 + 2x_4$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_3 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Wiederholung:

A = $\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\right)$

A $\vec{x}$ = $x_1 \overrightarrow{a_1} + x_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{x_n a_n}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

A $\vec{x}$ = $\vec{b}$ hat die Lösung $\vec{x} \in K^n$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\vec{b} = x_1 \overrightarrow{a_1} + \ldots + x_n \overrightarrow{a_n}$

$\Leftrightarrow\quad \vec{b} \in Span\left\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\right\}$

$\Leftrightarrow\quad \dim\left(Span\left\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\right\}\right)$
$= \left(Span\left\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}, \vec{b}\right\}\right)$

$\Leftrightarrow$ srg(A) = srg(A/$\vec{b}$) $\qquad$ srg = zrg = rg

$\Leftrightarrow$ rg(A) = rg(A/$\vec{b}$)

A $\vec{x}$ = $\vec{b}$ $\qquad$ das zugehörige homogene LGS A $\vec{x}$ = $\vec{0}$
ist A $\vec{x}_0$ = $\vec{b}$ und A $\vec{x}_1$ = $\vec{0}$ $\Rightarrow$ A$\left(\vec{x}_0 + \vec{x}_1\right)$ = $\vec{b}$

Es sei A $\in K^n$, dann heißt die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in K^n$, für die gilt A $\vec{x}$ = $\vec{0}$ ist der Kern der Matrix A

man schreibt: Ker(A)

Dimensionsformel:

$$\boxed{\dim(Ker(A)) + rg(A) = n}$$

dim(Ker(A)) = Anzahl der Nichtstufenvariablen

= n –Anzahl der Stufenvariablen

= n – rg(A)

Wir fassen zusammen:

Hauptsatz über LGS (2.Form)

Sei $A \in K^{(m,n)}$, $\vec{b} \in K^m$ dann gilt

(1) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A/\vec{b})$

(2) $A\vec{x} = \vec{b}$ hat höchstens eine Lösung $\Leftrightarrow$

$A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$ dim(Ker(A)) = 0 $\Leftrightarrow$ rg)A) = n

(3) $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A/\vec{b}) = n$

Wir können nun zeigen, dass für jede quadratische Matrix $A \in K^{(m,n)}$ gilt. $\exists B \in \mathrm{K}^{(n,n)}$

Satz: $A \in K^{(n,n)}$ dann gilt $Ker(A) = \{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow$ $AB = I_n$ hat eine Lösung B

$\Leftrightarrow$ $CA = I_n$ hat eine Lösung C

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

Beweis: $Ker(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow rg(A) = n$

$\Leftrightarrow Span\{\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}\} = K^n$

$\Leftrightarrow rg(A/\vec{b}) = \forall \vec{b} \in K^n$

$\Leftrightarrow$ jedes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ($\vec{b} \in K^n$) ist lösbar

$\Leftrightarrow \exists B \in \mathrm{K}^{(n,n)}: AB = I_n$ $\qquad rg(A) = n \overbrace{\Leftrightarrow}^{zrg=srg} rg(A^T) = n$

$\Leftrightarrow$ Jedes LGS $A^T \vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar

$\Leftrightarrow \exists C \in \mathrm{K}^{(n,n)}: A^T C^T = I_n$

$\Leftrightarrow \exists C \in \mathrm{K}^{(n,n)}: C^T {I_n}^T = I_n$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar w.A.

V ein VR über R

U $\subseteq$ V eines linearen Unterraumes $\Leftrightarrow \forall u \in U \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$\alpha u \in U \qquad \forall u, v \in U: \quad u + v \in U$

Def.: *Eine Teilmenge A eines VR'es V über K heißt ein offener Unterraum (lineare Mannigfaltigkeit), wenn es ein Vektor $a \in A$ und einen linearen Unterraum $U \subseteq V$ so gibt, dass gilt:*

$$A = \left\{ \vec{a} + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \right\}$$

Bsp.: Die Lösungsmenge eines (nicht homogenen) LGS ist ein offener UR.

$$L = \left\{ \vec{x} \in K^n \mid A\vec{a} = \vec{b} \right\} = \left\{ \vec{x}_1 + \vec{x}_0 \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$
$$= \left\{ \vec{x}_1 + \vec{x}_0 \mid \vec{x}_0 \in Ker(A) \right\}$$

wobei $\overrightarrow{x_1}$ eine Lösung von A $\vec{x} = \vec{b}$ ist.

2.6. Euklidische Vektorräume (Geometrie um $\mathbb{R}^n$)

Def.: *Es seien $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in \mathbb{R}^n$ dann heißt die Zahl $\overrightarrow{x_1} \circ \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}^T \cdot \overrightarrow{x_2}^T$ das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{x_1}$ und $\overrightarrow{x_2}$*

Bsp.: n = 4

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_1} \circ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{x_1}^{\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{x_2}^{\mathrm{T}} = (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \underline{= -1}$

Def.: *Es sei* $\vec{x} \in \mathbb{R}$*, dann heißt* $\left|\vec{x}\right| = \sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}}$ *der Betrag (Länge) des Vektors* $\vec{x}$

Eigenschaften:

(1) $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{y} \circ \vec{x}$

(2) $\alpha\,(\vec{x} \circ \vec{y}) = (\alpha\,\vec{x}) \circ \vec{y} = \vec{x} \circ (\alpha\,\vec{y})$

(3) $\vec{x}\,(\vec{z} \circ \vec{y}) = \vec{x} \circ \vec{y} + \vec{x} \circ \vec{z}$

(4) $\left|\vec{\alpha}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(5) $\left|\vec{x}\alpha\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{x}\right|$

(6) $|\vec{x} \circ \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$

(Cauchy – Schwarz Ungleichung)

(7) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$

Beweis:

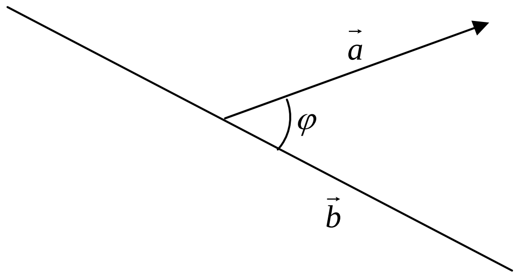
(1) $\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{x}^{\,\mathrm{T}} \circ \vec{y} = s \in \mathbb{R}^{(1,1)} = \mathbb{R}$

$\vec{y} \circ \vec{x} = \vec{y}^{\,\mathrm{T}} \circ \vec{x} = t \in \mathbb{R}^{(1,1)} = \mathbb{R}$

$\mathrm{s} - \mathrm{s}^{\mathrm{T}} = (\vec{x}^{\,\mathrm{T}} \circ \vec{y}) = \vec{y}^{\,\mathrm{T}} \circ \vec{x} = \vec{x} \circ \vec{y} = \mathrm{t}$

Es seien $\vec{x}, \vec{y}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$.
Dann definiert man den von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossenen Winkel $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ durch

$$\varphi = \sphericalangle\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \arccos \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|}$$



$0 \le \varphi \le \pi$

Beispiel: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sphericalangle\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \qquad = \text{arc cos}\ \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|} = \text{arc cos}\ \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \text{arc cos}\ \frac{-1}{\sqrt{18}} = \text{arc cos}\ \frac{-1}{3\sqrt{2}}$$

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ sind orthogonal, wenn gilt $\vec{y} = 0$
Ein Vektor $\vec{x}$ heißt normiert, wenn $\left|\vec{x}\right| = 1$

Man kann jeden Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ normieren:

$\overrightarrow{x_0} = \frac{1}{\left|\vec{x}\right|}\vec{x}$ eine Basis B = $\left\{\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_k}\right\}$ heißt <u>Orthonormalbasis (ONB)</u>

wenn gilt: $\overrightarrow{b_i} \circ \overrightarrow{b_j} = 0 \quad \textit{für} \quad 1 \le i \le j \le k$

B heißt ONB, wenn gilt: $\overrightarrow{b_i} \circ \overrightarrow{b_j} = \begin{cases} 0 \ \textit{von}\ i \neq j \\ 1 \ \textit{sonst} \end{cases}$

Beispiel:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine ONB}$$

Es sei B = $\left\{\vec{b_1},\dots,\vec{b_k}\right\}$ eine ONB von VR V über $\mathbb{R}$ und $\vec{x} \in V$

Wir suchen die Basisdarstellung von $\vec{x}$ bzgl. B also:

ges.: $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{x} = \alpha_1\vec{b_1} + \alpha_2\vec{b_2} + \dots + \alpha_k\vec{b_k}$

Sei A = $\left(\vec{b_1} \,|\, \vec{b_2} \,|\dots|\, \vec{b_k}\right)$ dann erhält man die Zahlen $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ als Lösung des LGS:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \vec{x}$$

Da B eine ONB ist, gilt auch $\alpha_i = \vec{x} \circ b_i; \quad 1 \le i \le k$

Beweis: Sei $\vec{x} = \alpha_1\vec{b_1} + \alpha_2\vec{b_2} + \dots + \alpha_k\vec{b_k}$ dann gilt:

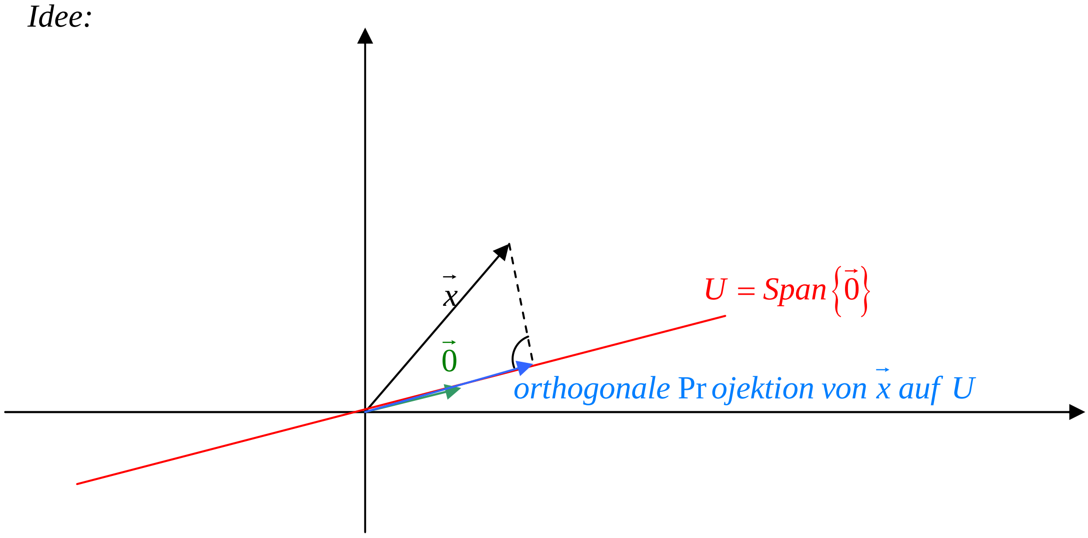
$$\vec{x} \circ b_i = \left(\alpha_1\vec{b_1} + \dots + \alpha_k\vec{b_k}\right) = \vec{b_i}$$

$$= \alpha_1\left(\vec{b_1} \circ b_i\right) + \dots + \alpha_k\left(\vec{b_k} + \vec{b_1}\right)$$

$$= \alpha_i \underbrace{\left(b_i \circ b_j\right)}_{=1} = \alpha_i$$

Die orthogonale Projektion eines Vektors auf einem Unterraum

Idee:



Es sei $U \subseteq R^n$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dann heißt der Vektor $\vec{y} = \Pr oj(\vec{x}, i) \in U$ die orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf U, wenn gilt: $\vec{x} - \vec{y}$ steht senkrecht auf U

$\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y}$ ist orthogonal zu allen Vektoren $\vec{u} \in U$ (auch: $\vec{x} - \vec{y} \perp \vec{u}$)

<u>Berechnung der orthogonalen Projektion eines Vektors $\vec{x}$ auf einem UR U</u>

U = Span $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$

$\vec{y}$ ist die orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf u $\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \perp \vec{u}, \forall \vec{u} \in U$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{x} - \vec{y}\right) \perp \left(\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \alpha_l \overrightarrow{a_l}\right), \forall \alpha_1 ... \alpha_l \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{x} - \vec{y}\right) \circ \left(\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \alpha_l \overrightarrow{a_l}\right) = 0 \ , \forall \alpha_1 ... \alpha_l \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \left(\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \circ \overrightarrow{a_1}\right) + ... + \alpha_l \left(\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \circ \overrightarrow{a_l}\right) = 0 \ , \forall \alpha_1 ... \alpha_l \in \mathbb{R}$$

$$\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \circ \overrightarrow{a_i} = 0 \ , \forall i \in \{1, ..., l\}$$

Sei A = $\left\{\overrightarrow{a_1} \mid \overrightarrow{a_2} \mid ... \mid \overrightarrow{a_l}\right\}$ dann gilt: $\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \circ \overrightarrow{a_i} = 0 \ , \forall i \in \{1, ..., l\}$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{x} - \vec{y}\right)^T \circ \overrightarrow{a_i} = 0 \ , \forall i$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_i}^T \circ \left(\vec{x} - \vec{y}\right) = 0 \ , \forall i$$

$$\Leftrightarrow A^T \left(\vec{x} - \vec{y}\right) = 0 \ , \forall i \qquad \text{da } \vec{y} \in U \text{ ist}$$

$$\vec{y} = \beta_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \beta_l \overrightarrow{a_l} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

damit erhält man: $\vec{y}$ *ist orth. Projektion von* $\vec{x}$ *auf* U

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \beta_1 \vec{a_1} + \beta_2 \vec{a_2}$$

$$A = \left(\vec{a_1} \mid \vec{a_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T \vec{x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T \vec{x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_1 \end{pmatrix} = A^T \vec{x} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \boxed{\vec{y} = \vec{0}} \Leftrightarrow \vec{x} \perp U$$

U wie oben

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T \vec{x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, U sei UR des $\mathbb{R}^n$ und $\vec{x} \in U$ die orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf U. dann gilt: $\vec{x} - \vec{y} \perp U$

Ist $\vec{a} \perp U$ und ist B = $\left\{\vec{b_1}, ..., \vec{b_l}\right\} \subseteq U$, a $\vec{a} \neq 0$ linear unabhängig, dann ist: $B \cup \left\{\vec{a}\right\}$ linear unabhängig

Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren (SONV)

geg.: B eine Basis eines UR $U \subseteq \mathbb{R}^n$

ges.: „neue" Basis B' von U so, dass B' ONB von U ist

Sei B = $\left\{\vec{b_1}, ..., \vec{b_k}\right\}$ und B'= $\left\{\vec{c_1}, ..., \vec{c_k}\right\}$

SONV:

① $$\vec{c_1} := \frac{1}{\left|\vec{b_1}\right|}\vec{b_1}$$

② $$\vec{c_2} := \frac{1}{\left|\vec{b_2} - \left(\vec{b_2} \circ \vec{c_1}\right)\vec{c_1}\right|}\left(\vec{b_1}\left(\vec{b_2} \circ \vec{c_1}\right)\vec{c_1}\right)$$

③ $$\vec{d_3} = \vec{b_3} - \left(\left(\vec{b_3} \circ \vec{c_2}\right)\vec{c_2} + \left(\vec{b_3} \circ \vec{c_1}\right)\vec{c_1}\right)$$

$$\vec{c_3} := \frac{1}{\left|\vec{d_3}\right|}\vec{d_3}$$

④ $$\vec{d_k} := \vec{b_k} - \sum_{i=1}^{k-1}\left(\vec{b_k} \circ \vec{c_i}\right)\vec{c_i}$$

$$\vec{c_k} := \frac{1}{\left|\vec{d_k}\right|}\vec{d_k}$$

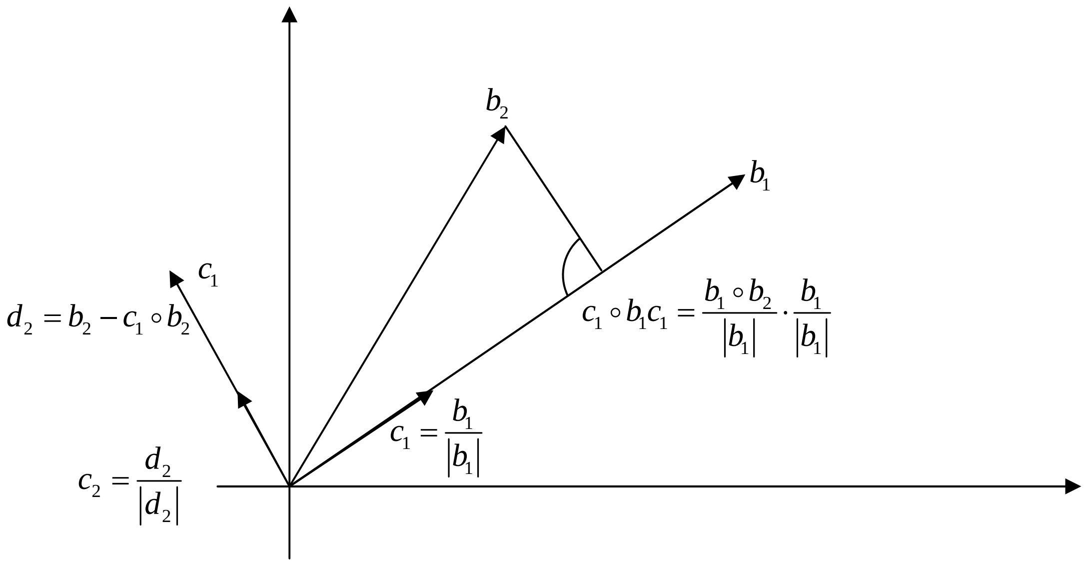
Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

geg.: B = $\{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq U$

Basis des Untervektorraumes U $\subset \mathbb{R}^n$

ges.: B' = $\{c_1, \ldots, c_k\} \subseteq U$

ONB von U



Algorithmus:

Für i = 1 , k berechne $d_i := b_i - \sum_{\gamma=1}^{i-1} \left(c_\gamma \circ b_\gamma\right) \cdot c_\gamma$ $\qquad c_i := \frac{d_i}{|d_i|}$

im ersten Schritt (i = 1) ist $d_1 = b_1 - \sum_{\gamma=1}^{0} \left(c_\gamma \circ b_\gamma\right) \cdot c_\gamma = b_1$

$$c_1 = \frac{d_1}{|d_1|} = \frac{b_1}{|b_1|}$$

Beispiel: U = $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=b_3} \right\}$ $\qquad c_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d_2 = b_i - \left(c_1 \circ b_2\right) \cdot c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \frac{d_2}{|d_2|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{2}}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = b_3 - (c_1 \circ b_3)c_1 - (c_2 \circ b_3)c_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \frac{d_3}{|d_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}$$

Beweis der Korrektheit des SONV

zu zeigen ist

(1) B' ist eine Basis von U

(2) $c_i \circ c_i = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$

wir zeigen zuerst durch Induktion nach l:

(a) $d_l \neq 0$

(b) Span (B'_l) = Span (B_l)

(c) $c_l \cdot c_i = \begin{cases} 0; & i = 1, \ldots, l-1 \\ 1: & i = l \end{cases}$

wobei

$B_l = \{b_1, \ldots, b_l\}$ $B_l' = \left(c_1, \ldots, c_l\right)$

(IA) l = 1

(a) $d_1 = b_1 \neq 0, \quad (b) Span B_1' = Span\{c_1\} = Span\{b_1\} = Span B_1$

(b) $c_1 \circ c_1 = \frac{d_1}{|d_1|} \circ \frac{d_1}{|d_1|} = \frac{1}{|d_1|^2} d_1 \cdot d_1 = 1$

(IS) (a) Annahme $d_l = 0$

$\Rightarrow b_l \in Span B'_{l-1} \overset{IV}{=} Span B_{l-1}$

$\Rightarrow B_l$ nicht linear unabhängig ist

(m.a.W. die Vektoren von B_l sind linear abhängig)

Widerspruch also $d_l \neq 0$

(b) Span $B_l \supseteq$ Span B_l’ $\supseteq$ Span B_{l-1}’ $\overset{IV}{=} Span\ B_{l-1}$

nun gilt:

$$b_l = \underbrace{d_l}_{=|d_l| c_l} + \sum_{\gamma=1}^{l-1} \left(c_\gamma \circ b_l\right) \cdot c_\gamma \in Span B'_l$$

und sonst:

B_l = Span B'_l

(c) Für i = 1,…,l-1 gilt:

$$d_l \circ c_i = b_l - \sum_{\gamma=1}^{l-1} \left(c_\gamma \circ b_l\right) \circ c_i$$

$$b_l \circ c_i - \sum_{\gamma=1}^{l-1} \left(c_\gamma \circ b_l\right) c_\gamma \circ c_i$$

$$\overset{IV}{=} b_l = c_i - c_i \circ b_l = 0$$

$$c_l \circ c_l = \frac{d_l}{|d_l|} \circ \frac{d_l}{|d_l|} = \frac{1}{|d_l|^2} d_l \circ d_l = 1`$$

somit gilt: Span B = Span B_l = Span B_k’ = Span B’

Da dieser Span B = k und B' aus Vektoren besteht, ist auch B' eine Basis Wegen (c) besteht B' aus orthonormalen Vektoren.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum B = $\{b_1, ..., b_k\}$ eine ONB von U und $x \in \mathbb{R}^n$

Dann kann die orthogonale Projektion y = Proj(x:U) wie folgt berechnet werde:

$$y = \underbrace{x \circ b_1}_{\in\mathbb{R}} + ... + x \circ b_k b_k$$

$$\sum_{i=1}^{k} x^T b_i b_i = \sum_{i=1}^{k} b_i x^T b_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} b_i b_i^T\right)}_{\substack{\downarrow \\ Matrix}} x$$

Wir prüfen nach

$$(x-y) \circ bj = \left(x - \sum_{i=1}^{k} x^T b_i b_i\right) \circ b_j$$

$$= x^T b_j x - \sum_{i=1}^{k} \left(\underbrace{x^T b_i}_{\mathbb{R}} b_i\right)^T \circ b_j$$

$$= x^T b_j - \sum_{i=1}^{k} \left(x^T b_i\right) b_i^T b_j = x^T b_j - \left(x^T b_j\right) \underbrace{b_i^T b_j}_{=1}$$

Somit gilt für:

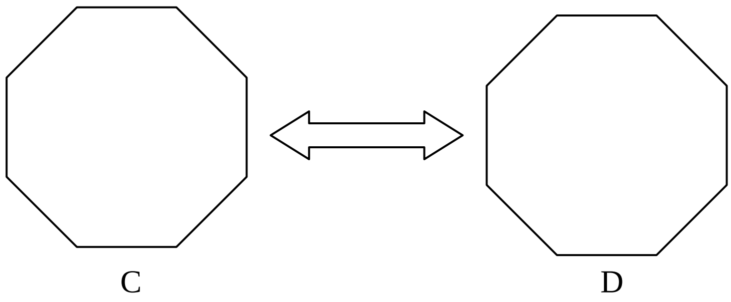
$$U = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j \in U$$

$$(x-y) \circ U = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \underbrace{\left(x-y\right) \circ b_j}_{=0 \ s.o.}$$

2.6.2. Abstände

Seien C,D $\subseteq \mathbb{R}^n$

Wir definieren:



Der Abstand dist (C,D) der Mengen C,D ist die kleinstmögliche Entfernung von zwei Vektoren $\vec{c} \in C \quad \vec{d} \in D$:

$$\text{dist (C,D) = min } \left\{ \vec{c} - \vec{d} \;\middle|\; \begin{matrix} \vec{c} \in C \\ \vec{d} \in D \end{matrix} \right\}$$

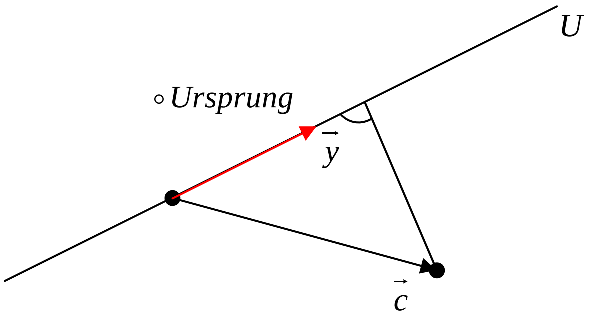
wir schreiben: $dist\left(C, \left\{\vec{d}\right\}\right) = dist\left(C, \vec{d}\right)$

Insbesondere: $dist\left(\vec{c}, \vec{d}\right) = \left|\vec{c} - \vec{d}\right|$

Abstand Punkt, linearer Unterraum

Es seien $\vec{c} \in \mathbb{R} \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum

Ferner sei $\vec{y} = \text{Proj}\left(\vec{c} : U\right)$



Behauptung:

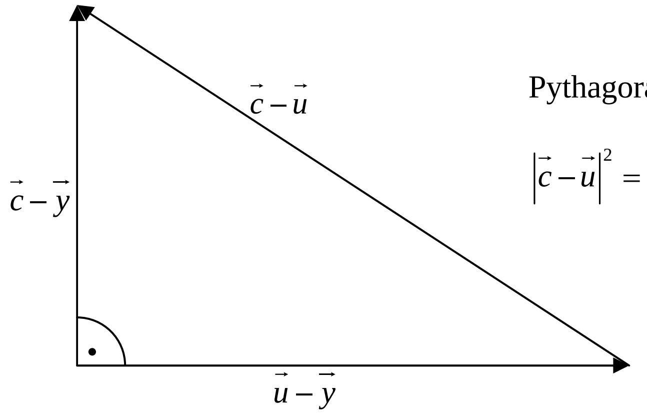
Für alle $\vec{u} \in U$ gilt:

$$\left|\vec{c} - \vec{y}\right| \le \left|\vec{c} - \vec{u}\right|$$

Beweis:

Da $\vec{c}-\vec{y} \perp U$ gilt: $\left(\vec{c}-\vec{y}\right)\circ\left(\vec{u}-\vec{y}\right)=0$

Also bilden die Vektoren $\vec{c}-\vec{y}, \vec{u}-\vec{y}$ und $\vec{u}-\vec{y}$ die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks:



Pythagoras:

$$\left|\vec{c}-\vec{u}\right|^2 = \left|\vec{c}-\vec{y}\right|^2 + \underbrace{\left|\vec{u}-\vec{y}\right|^2}_{\geq 0}$$

D $\left|\vec{u}-\vec{y}\right|$=0 nur, wenn $\vec{u}=\vec{y}$ *gilt sogar*

$\left|\vec{c}-\vec{y}\right| < \left|\vec{c}-\vec{u}\right|, \forall \vec{u}+\vec{y} \quad \vec{u}\in U$

Also gilt:

$$\boxed{dist\left(\vec{c}:U\right)=\left|\vec{c}-\operatorname{Pr}oj\left(\vec{c}:U\right)\right|}$$

Beispiel:

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad U=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\vec{y}=\operatorname{Pr}oj\left(\vec{c}:U\right) \quad \left(\vec{c}-\vec{y}\right)\perp U$

$$\vec{y}\in U \Leftrightarrow \vec{y}=\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\\2&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}-\vec{y}\perp U \Leftrightarrow \left(\vec{c}-\vec{y}\right)\circ\vec{U}=0 \quad \forall\vec{u}\in U$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{c}-\vec{y}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\left(\vec{c}-\vec{y}\right)\circ\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}\left(\vec{c}-\vec{y}\right)=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}\left(\vec{c}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}\vec{c}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=1,\quad \beta_2=-1$$

$$\vec{y}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

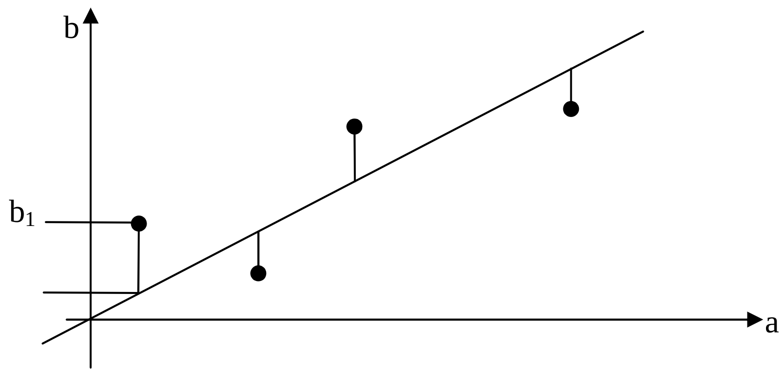
$$\text{dist}\left(\vec{c},U\right)=\left|\vec{c}-\vec{y}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Anwendung: Methode der kleinsten Quadrate:

geg.: Paare von Messwerten: $(a_1,b_1),\ldots(a_n,b_n)$

ges.: Geradengleichung: $b = \alpha\, a + b$



so, dass: $\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i = \left(\alpha a_i + \beta\right)\right)^2 \to Min$

Sei: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir betrachten:

$$\vec{b} - \alpha\, \vec{a} - \beta\vec{1} = \vec{z}$$

Dann gilt:

$$\left|\vec{z}\right|^2 = \vec{z}^{\,T} \cdot \vec{z} = \sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \alpha a_i - \beta\right)^2$$

Behauptung:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \left(\alpha a_i - \beta\right)\right)^2 \right\} = \text{dist}\left(\vec{b}, U\right)$$

mit U = Span $\left\{\vec{1}, \vec{a}\right\}$

dist $\left(\vec{b}, U\right)^2$ =

min $\left\{\left|\vec{b}-\vec{u}\right| \mid \vec{u} \in U\right\}^2$ =

min $\left\{\left|\vec{b}-\vec{u}\right|^2 \mid \vec{u} \in U\right\}^2$ =

min $\left\{\left|\vec{b}-\alpha\vec{a}-\beta\vec{1}\right|^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ =

min $\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \alpha a_i - \beta\right)^2 \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ …..richtig!

2.7. Determinanten

2.7.1. Determinanten von 2x2 Matrizen

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in K^{(2,2)}$

Def.: det (A) = $a \cdot d - b \cdot c$

heißt die Determinante von A

Andere Schreibweisen:

det (A) = | A | = det $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Beispiel:

A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$

det (A) = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = $2 \cdot 2 - 1 \cdot 3$ = 1

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \text{ nicht linear unabhängig} \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0 \end{array}}$$

Beweis:

1. Fall $\quad a = b = 0$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \vec{0}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$ …ist nicht linear unabhängig

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - 0 \cdot c = 0$$

2. Fall $\quad a \neq 0 \quad oder \quad b \neq 0$

Wir betrachten nur den Fall $a \neq 0$.
Der andere Fall geht analog.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a \cdot d - b \cdot c = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot d - c \cdot b \Leftrightarrow d = \frac{c}{a} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$ …ist nicht linear unabhängig

Folgerung:

Ist $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in K^{(2,2)}$

dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) det (A) = $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$

(2) rg (A) = 2

(3) A ist invertierbar

(4) Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jede rechte Seite $\vec{b} \in K^2$ genau <u>eine</u> Lösung

Beweis:

$\neg(1) \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$ ist nicht linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ dim Span $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} < 2$

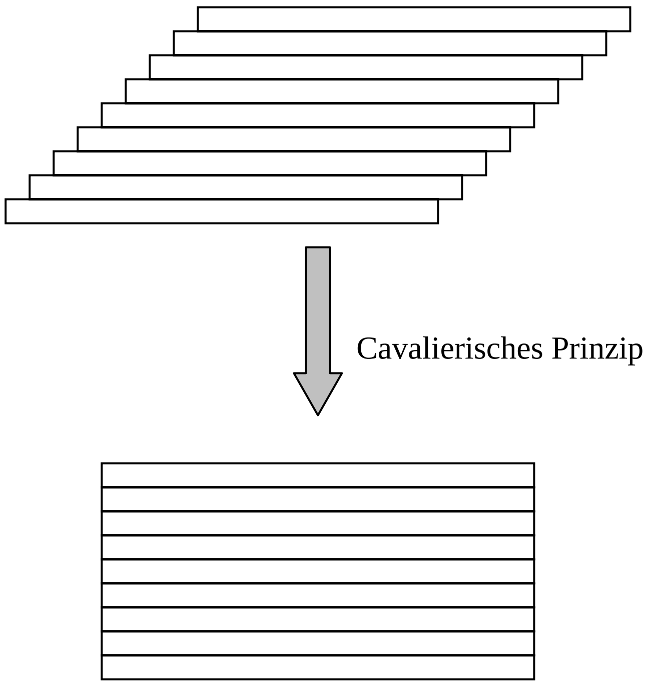
$\Leftrightarrow$ rg (A) < 2 $\Leftrightarrow \neg(2)$

Also (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$\boxed{\text{Die Äquivalenz von (2), (3) und (4) wurde schon bewiesen.}}$

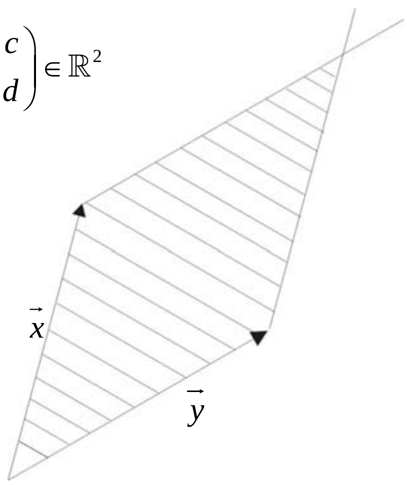
Anwendung der Determinante

- zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Parallelogramms



Flächeninhalt = h $\cdot$ Länge $\left(\overline{AD}\right)$

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



Sei F der Flächeninhalt des von $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

Dann gilt:

$$F = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = |\vec{y}| \cdot \text{Höhe}$$

Sei g die Gerade die senkrecht auf $\vec{y}$ steht.
Sei $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ ein Richtungsvektor von g, dann ist $\vec{z} \cdot \vec{y} = 0$

Wir wählen: $\vec{z} = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$

<u>Probe:</u> $\vec{z} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -d \cdot c + c \cdot d = 0$ …richtig!

Höhe = | Proj. ($\vec{x}$:g) |

Proj. ($\vec{x}$:g) $= \frac{\vec{z} \cdot \vec{x}}{|\vec{z}|} \cdot \frac{1}{|\vec{z}|} \cdot \vec{z}$

(Bemerkung: $\left\{ \frac{1}{|\vec{z}|} \cdot \vec{z} \right\}$ ist eine ONB von g)

F $= |\vec{y}| \cdot$ Proj. ($\vec{x}$:g)

$$= |\vec{y}| \cdot \left| \frac{\vec{z} \cdot \vec{x}}{|\vec{z}|} \cdot \frac{1}{|\vec{z}|} \cdot \vec{z} \right|$$

$$= \cancel{|\vec{y}|} \cdot \frac{\vec{z} \cdot \vec{x}}{\cancel{|\vec{z}|^2}} \cdot \cancel{|\vec{z}|}$$

$$= |\vec{z} \cdot \vec{x}| = \left| \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = |cb - ad|$$

$$\vec{z_0} := \frac{1}{|\vec{z}|} \cdot \vec{z}, \quad |\vec{z_0}| = 1$$

g = Span $\{\vec{z_0}\}$

$\vec{w}$ = Proj. ($\vec{x}$:g) = $\alpha \cdot \vec{z_0}$

$\alpha = \vec{x} \cdot \vec{z_0}$

$$\alpha = \vec{x} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{z}|} \cdot \vec{z} \right) = \frac{1}{|\vec{z}|} \left(\vec{x} \cdot \vec{z} \right)$$

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{z_0} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{z}}{|\vec{z}|} \cdot \frac{1}{|\vec{z}|} \vec{z}$$

$$|\vec{y}| = \left| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$|\vec{z}| = \left| \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right| = \sqrt{-d^2 + c^2}$$

2.7.2. Allgemeine Definition der Determinante

Es sei $A \in K^{(n,n)}$

Wir bezeichnen mit A_{ij} die (n-1)x(n-1) – Matrix, welche man durch Strecken der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A erhalt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$$

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A_{ij} heißt der Minor von A zu a_{ij}

Rekursive Definition von det A:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, a_{ij} \det(A_{ij})} \qquad \boxed{\det(a_n) = a_n}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1}\, a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$= (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 4) + 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 4) + 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)$$

$$= 1 \cdot (-5) + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1$$

$$= -5 - 2 + 2 \underline{= -5}$$

Eigenschaften der Determinante:

(D1) Ist $A \in K^{(n,n)}$ und entsteht $B \in K^{(n,n)}$ durch Vertauschen zweier Spalten von A, so gilt:

$$\det(A) = -\det(B)$$

(D2) Entsteht B durch Multiplikation einer Zeile von A mit einem Faktor α, so gilt:

$$\det(B) = \alpha \det(A)$$

Beweis von (D2):

1. Fall 1. Zeile von A wurde mit α multipliziert

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_{ij} \det(B_{ij})$$

Offenbar: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$

und da B_{ij} keine Elemente aus der 1. Zeile enthält:

$\det(B_{ij}) = \det(A_{ij})$

$$\Rightarrow \det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$\alpha \det(A)$$

2. Fall: Induktion nach n

n = 1 => A hat nur eine erste Zeile $\underset{Fall\,1}{\Longrightarrow}$ …richtig

$n \geq 2$ => B entstehe durch Multiplikation der i-ten Zeile von A mit α $(i \neq 1)$

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_{ij} \det(B_{ij})$$

$$i > 1 \quad = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(B_{ij})$$

B_{ij} entsteht durch Multiplikation der (i-1) – Zeile mit α aus A_{ij}

$\underset{I.S.}{\Longrightarrow}$ $\det(B_{ij}) = \alpha \det(A_{ij})$

$\Rightarrow$ $\det(B) = \alpha \det(A)$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(D1) Entsteht $B \in K^{(n,n)}$ aus $A \in K^{(n,n)}$ durch Vertauschen zweier Zeiler, gilt:

det B = - det A

(D2) Entsteht $B \in K^{(n,n)}$ durch Multiplikation einer Zeile von A mit α , dann gilt:

det B = α det A

(D3) Sind A,B,C $\in K^{(n,n)}$, welche sich nur in der i-ten Zeile unterscheiden und gilt

$\underline{a}_i = \underline{b}_i + \underline{c}_i$, dann ist det A = det B + det C

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{1} \\ 1+2 & 2+0 & 1+0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1+2 & 1+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \otimes$$

$$\begin{vmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+0) \cdot 1 - (1+0) \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 1+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2) \cdot 1 - (1+0) \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2) \cdot 1 - (2+0) \cdot 1$$

$\otimes =$

$= 1\cdot\left[(2+0)\cdot 1-(2+0)\cdot 1\right]-2\cdot\left[(1+2)\cdot 1-(1+0)\cdot 1\right]+1\cdot\left[(1+2)\cdot 1-(2+0)\cdot 1\right]$

$= 1(2\cdot 1\text{-}1\cdot 1)\text{-}2(1\cdot 1\text{-}1\cdot 1)\text{+}1(1\cdot 1\text{-}2\cdot 1)\text{+}1(0\cdot 1\text{-}0\cdot 1)\text{-}2(2\cdot 1\text{-}0\cdot 1)\text{+}1(2\cdot 1\text{-}0\cdot 1)$

$= 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

= det B + det C ….richtig

(D4) Entsteht $B \in K^{(n,n)}$ durch Addition des α-fachen der i-ten Zeile von A zur j-ten Zeile von A $(i \neq j)$, so gilt:

det B = det A

Beweis:

$$B = \begin{pmatrix} \underline{a}_i \\ \underline{a}_j + \alpha \underline{a}_i \\ \underline{a}_{j+1} \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \qquad \text{(D3)} \Rightarrow$$

$$= \det B = \det A + \det \begin{pmatrix} \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \alpha \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \quad j$$

$$= \det B = \det A + \alpha \cdot \det \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$= \det A$

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} (D1) \\ \downarrow \\ = \\ \uparrow \\ \langle Tausche\ i-te\ und\ \ j-te\ Zeile \rangle \end{array} \quad -1 \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \det \begin{pmatrix} \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = 0$$

(D5) $\det A^T = \det A$

(D6) $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

(D7) Ist $A \in K^{(n,n)}$, dann gilt:

$$\operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens zur Berechnung der Determinante

① Sei A eine untere Dreiecksmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$, also $a_{ij} = 0$ wenn j > 1

Es gilt: Ist $A \in K^{(n,n)}$ eine untere Dreiecksmatrix dann gilt:

det A = $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Beweis: det A $= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} \det(A_{ij})$

$= a_{11} \cdot \det(A_{11})$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ * & a_{33} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ * & a_{44} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots a_{nn}$

Wegen (D5) gilt analog:

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente.

② Hat eine Matrix A eine Nullzeile, dann ist det A = 0

③ Erklärung am Beispiel:

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 1 & (-1) \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & (-2) \quad (-1) \\ 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & (-2= \\ 0 & -4 & -2 & (-\frac{1}{4}) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-4)\frac{1}{2} \underline{= -2}$$

④ Allgemein gilt:

Kann A durch Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens in eine Matrix mit einer Nullzeile umgeformt werden so gilt:

det A = 0

Kann A durch Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens in eine untere Dreiecksmatrix verwandelt werden, so gilt:

$\det A = (-1)^k \, p \det D$

dabei ist: k die Anzahl der durchgeführten Zeilenvertauschungen, und

$\frac{1}{p}$ ist das Produkt aller Faktoren mit denen Zeilen multipliziert werden.

…noch ein Verfahren:

Sarrn´sche Regel:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = D = \text{aei + bfg + cdh - gec - hfa – idb}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \quad A \in K^{(n,n)}$$

Satz: Ist $A \in K^{(n,n)}$ so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) det A $\neq 0$
(2) rg (A) =n
(3) A ist invertierbar
(4) A $\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung für alle $\vec{b} \in K^n$

…ein weiteres Verfahren zur Berechnung von det A:

Laplace´scher Entwicklungssatz:

Es gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2^+ & 3^- & 4^+ \\ 0^- & 1^+ & 0^- \\ 1^+ & 5^- & -7^+ \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+2} a_{2j} \det(A_{2j})$$

$$= -0 + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} - 0 = -14 - 4 = \underline{-18}$$

Anwendung der Determinante

① Cramer´sche Regel

Satz: Es sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in K^{(n,n)}, \vec{b} \in k^n$, $\det A \neq 0$ dann gilt:

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ hat genau eine Lösung } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n \text{ mit:}$$

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} b_k \det A_{kj}$$

$$x_j = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}$$

j-k -Spalte

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5 + 1 \underline{= -4}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} \left(2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}(-10 + 6) \underline{= 1}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\,(1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix})$$

$$= -\frac{1}{4}\,(\,-2 + (-2)\,)\ \underline{= 1}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\,(1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix})$$

$$= -\frac{1}{4}\,(\,2 - 6\,)\ \underline{= 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: zu zeigen ist, es gilt:

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} b_k \det A_{kj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

j-te Spalte

(b)
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} b_k \det A_{kj}\right) = b_i$$

$\boxed{(a)}$ Wir entwickeln die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_n & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

nach der j-ten Spalte

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} b_k \det A_{kj}$$

$$\Downarrow$$

Damit ist (a) bewiesen

$\boxed{(b)}$ Es sei $\mathrm{S}(\underline{u}, i)$ die Matrix, welche man aus A erhält, nachdem man den i-ten Zeilenvektor von A durch $\underline{u}$ ersetzt.

Dann gilt:

$$\text{der } \mathrm{S}(\underline{u}, i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} n_j \det A_{ij}$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

trivialerweise:

$\mathrm{S}(\underline{u}, i) = A$,also

$\det \mathrm{S}(\underline{u}, i) = \det \mathrm{S}(\underline{a}_i, i) = \det A$

Ist $\underline{n} = \underline{a}_k$ mit $\underline{k+1}$ dann gilt:

$\mathrm{S}(\underline{u}, i) = \mathrm{S}(\underline{a}_k, i) = 0$

da die Matrix $\mathrm{S}(\underline{a}_k, i)$ zwei gleiche Zeilen hat.

Wir berechnen:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} b_k \det A_{kj} \right)$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ji} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} b_k \det A_{kj} \right)$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ji} (-1)^{k+j} b_k \det A_{kj} \right)$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} (-1)^{k+j} b_k \det A_{kj} \right)$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ji} \det A_{kj} \right)$$

$$= \mathrm{S}\left(\underline{a}_i, k\right)$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \det \mathrm{S}\left(\underline{a}_i, k\right)$$

bekannt ist:

$$\det \mathrm{S}\left(\underline{a}_i, k\right) \begin{cases} 0, \mathit{wenn}\ i \neq k \\ \det A, \mathit{wenn}\ i = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \det \mathrm{S}\left(\underline{a}_i, k\right)$$

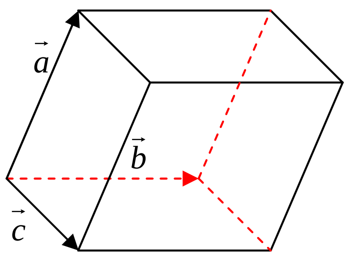
$$= \frac{1}{\det A} b_i \det \mathrm{S}\left(\underline{a}_i, k\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det A}} b_i \cancel{\det A} = \underline{b_i}$$ w.A.

Bemerkung:

Volumen eines Parallelepipeds im $\mathbb{R}^3$ Kreuzprodukt:

Es seinen $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$



$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ spannen ein Parallelepiped P auf

Behauptung: Volumen (P) = $\left(\left| \begin{matrix} \vec{a}^T \\ \hline \vec{b}^T \\ \hline \vec{c}^T \end{matrix} \right| \right)$

Beweis: Volumen (P) = Grundfläche $\cdot$ Höhe

Die Grundfläche sei das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Parallelogramm.

Sei g eine Gerade, welche senkrecht auf der Grundfläche steht. Wir wählen g so, dass g den Ursprung $\vec{0}$ enthält.

Dann gilt Höhe = $|\operatorname{Proj}\left(\vec{n} : g\right)|$

Ist $\vec{V}$ ein Richtungsvektor von g mit $|\vec{V}| = 1$, so gilt:

$\left|\vec{V} \cdot \vec{a}\right| = |\operatorname{Proj}\left(\vec{n} : g\right)| = \text{Höhe}$

$\Rightarrow$ Also gilt:

$$\begin{aligned} \text{Volumen (P)} &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= \text{Grundfläche} \cdot \left|\vec{V} \cdot \vec{a}\right| \\ &= |(\text{Grundfläche}\,\vec{V}) \cdot \vec{a}\,| \end{aligned}$$

$$\left(\begin{vmatrix} \vec{a}^T \\ \hline \vec{b}^T \\ \hline \vec{c}^T \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left| a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} \right|$$

Es gilt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \circ \vec{d} \qquad \text{wobei } \vec{d} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen, dass:

(i) $\vec{d} \perp \text{Span}\{\vec{b}, \vec{c}\}$ *($\vec{d}$ steht also senkrecht auf dem von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramm)*

(ii) $|\vec{d}|$ = Flächeninhalt des von $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramm

$$\Downarrow$$

(i) $\Leftrightarrow$ $\vec{b} \circ \vec{d} = 0$ *und* $\vec{c} \circ \vec{d}$ es gilt:

$$\vec{b} \circ \vec{d} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \vec{d} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{c} \circ \vec{d} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(ii) $\quad \left|\vec{d}\right|^2 = \vec{d} \circ \vec{d}$

$$= \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(b_i c_j - b_j c_i\right)^2$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(b_i^2 c_j^2 - 2 b_j b_i c_i c_j + b_j^2 c_i^2\right)$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(b_i^2 c_j^2 - b_j^2 c_i^2\right) - \sum_{1 \le i < j \le 3} 2 b_i c_j b_j c_i$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}} b_i^2 c_j^2 - \sum_{i=3}^{3} b_j^2 c_i^2 - \sum_{1 \le i < j \le 3} 2 b_i c_j b_j c_i$$

$$= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

$$= (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2$$

$$= b_1^2c_1^2 + b_2^2 c_2^2 + b_3^2 c_3^2$$

$$+ 2b_1c_1b_2c_2 + 2b_1c_1b_3c_3 + 2b_2c_2b_3c_3$$

$$= \left|\vec{b}\right|^2 \left|\vec{c}\right|^2 - \left(\vec{b} \circ \vec{c}\right)^2$$

zur Erinnerung: $\quad \vec{b} \circ \vec{c} = \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cos \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$

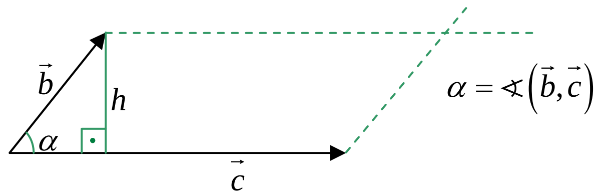
$$= \left|\vec{b}\right|^2 \left|\vec{c}\right|^2 - \left(\vec{b} \circ \vec{c}\right)^2 \cos^2 \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$$

$$= \left|\vec{b}\right|^2 \left|\vec{c}\right|^2 \left(1 - \cos^2 \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{c}\right)\right)$$

$$= \left|\vec{b}\right|^2 \left|\vec{c}\right|^2 \sin^2 \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$$

es gilt:

$$= \left| \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cos \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{c}\right) \right|$$ = Flächeninhalt des von $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramm =: F



$$F = \left|\vec{c}\right| \cdot h = \left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin \alpha$$

(i) & (ii) $\Rightarrow$

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| = \vec{a} \circ \vec{d}$$

= Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds

$$\vec{a} \circ \vec{d} = \left|\vec{d}\right| \cdot \left(\vec{a} \circ \frac{1}{\left|\vec{d}\right|} \vec{d} \right) = \left|\vec{d}\right| \cdot |\operatorname{Proj}\left(\vec{a} : g\right)|$$

= Grundfläche $\cdot$ Höhe

wobei g = Span $\left\{ \frac{1}{\left|\vec{d}\right|} \vec{d} \right\}$

<u>Kreuzprodukt:</u>

Es seien $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ dann definieren wir:

$$\vec{b} x \vec{c} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1$

$$= (b_2 c_3 - b_3 c_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (b_3c_1 - b_1c_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \vec{e_2}$$

$$+ (b_1c_2 - b_2c_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \vec{e_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

<u>Eigenschaften des Kreuzproduktes:</u>

(1) $\left(\vec{b}\,x\,\vec{c}\right)\circ\vec{b} = \left(\vec{b}\,x\,\vec{c}\right)\circ\vec{c} = 0$

(2) $\left|\vec{b}\,x\,\vec{c}\right| = \sqrt{\left|\vec{b}\right|^2 \left|\vec{c}\right|^2 - \left(\vec{b}\circ\vec{c}\right)^2} = \left|\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{b},\vec{c}\right)\right|$

= Flächeninhalt des von $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramm

(3) $\vec{b}\,x\,\vec{c} = -\left(\vec{c}\,x\,\vec{b}\right)$

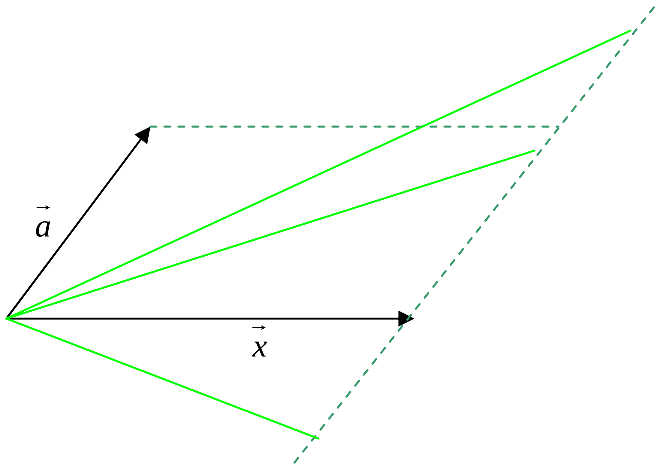
Bemerkung:

$$\vec{a}\circ\left(\vec{b}\,x\,\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ …das Spatprodukt

Anwendung des Kreuzproduktes:

Es seien $\vec{b}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren.

Wir betrachten das Gleichungssystem: $\vec{a} \circ \vec{x} = \vec{b}$



aus der geometrischen Betrachtung folgt:

Ist $\vec{a} \circ \vec{x} = \vec{b}$ dann ist auch

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{x} \circ \alpha \vec{a}\right) = \vec{b}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 + \alpha a_1 & x_2 + \alpha a_2 & x_3 + \alpha a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$ …vom Ursprung = $\left|\vec{b}\right|$

Bemerkung: *Die Gleichung $\vec{a} \circ \vec{x} = \vec{b}$ heißt*
<u>Plücker´sche Geradengleichung</u>

2.8. Lineare Abbildungen

2.8.1. Definition, Matrix einer linearen Abbildung

Es seien V,U zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$

Def.: Es sei f:V$\rightarrow$U eine Abbildung von V in U

f heißt eine lineare Abbildung, wenn gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in V$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in V, \quad \forall \alpha \in V$$

Beispiel:

(1) $V = \mathbb{R}^n, \qquad U = \mathbb{R}^m$

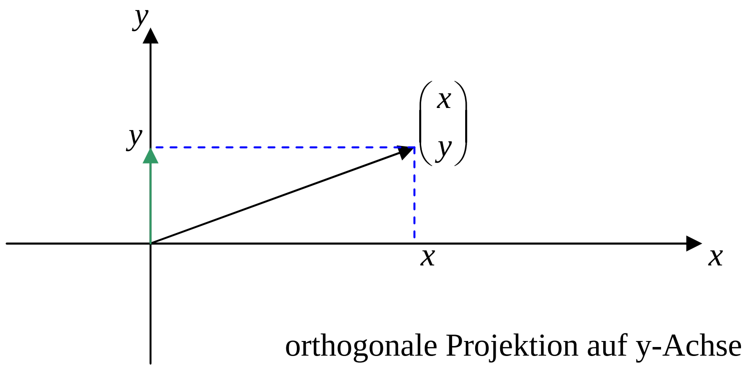
$$f\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}, \quad \text{wobei } A = \mathbb{R}^{(m,n)}$$

hier gilt: $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = A\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = A\vec{x} + A\vec{y} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$$f\left(\alpha\vec{x}\right) = A\left(\alpha\vec{x}\right) = \alpha A\vec{x} = \alpha f(\vec{x})$$

konkret:

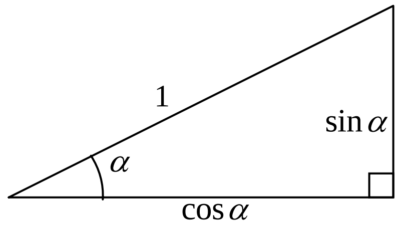
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ y \end{pmatrix} \qquad V = U = \mathbb{R}^2$$

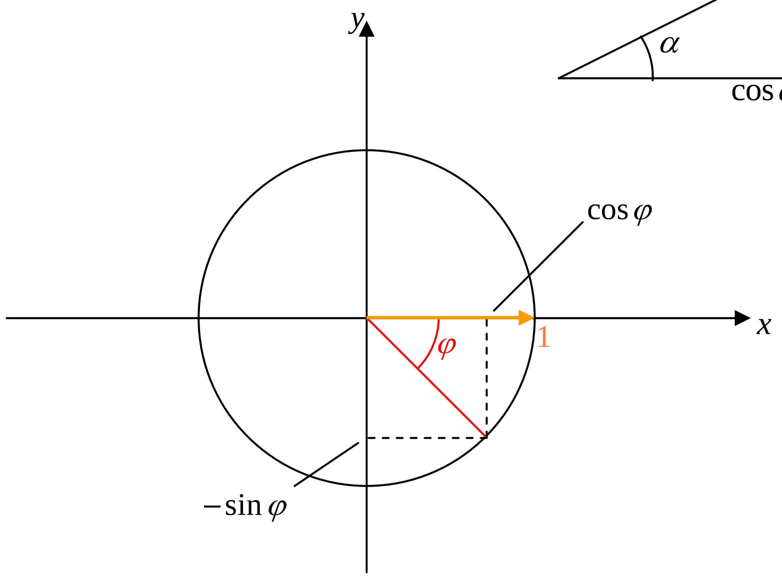


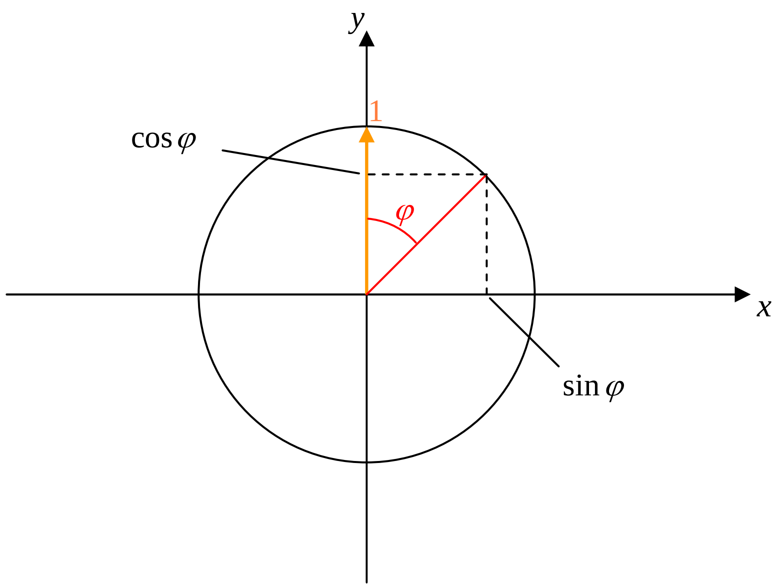
orthogonale Projektion auf y-Achse

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad\qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



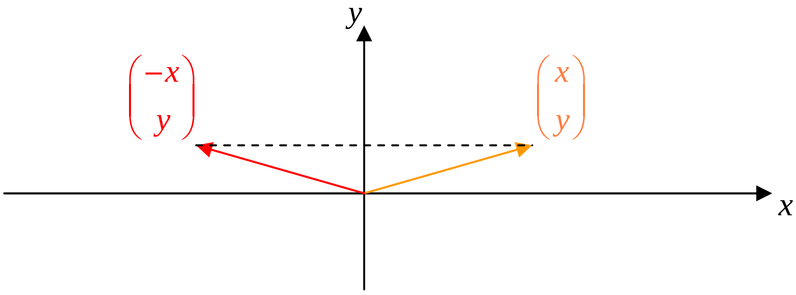




Drehung um φ im mathematisch negativen Sinn (Uhrzeigersinn)

Bemerkung: *Verschiebungen sind i.o. keine lineare Abbildung*

Spiegelung an der y-Achse:



(2) $\frac{d}{dx}: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{df}{dx}$$

anders:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Es sei f:V$\to$U eine lineare Abbildung

ferner sei: $B = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ eine Basis von V und
$C = \{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Basis von U

bekannt ist: Jeder Vektor $x \in V (y \in U)$ hat eine eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination von Basisvektoren:

$$x = \alpha_1 \vartheta_1 + \ldots + \alpha_n \vartheta_n$$

$$y = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m$$

wir betrachten:

$$f(x) = f(\alpha_1 \vartheta_1 + \ldots + \alpha_n \vartheta_n)$$

$$= f(\alpha_1 \vartheta_1) + \ldots + f(\alpha_n \vartheta_n)$$

$$= \alpha_1 f(\vartheta_1) + \ldots + \alpha_n f(\vartheta_n)$$

Es sei: $f(\vartheta_i) = a_{1i}u_1 + \ldots + a_{mi}u_m \qquad (i = 1, \ldots, n)$

$$f(x) = \alpha_1 f(\vartheta_1) + \ldots + \alpha_n f(\vartheta_n)$$

$$= \alpha_1 (a_{11}u_1 + \ldots + a_{m1}u_m) + \alpha_2 (a_{12}u_1 + \ldots + a_{m2}u_m) +$$

$$+ \ldots + \alpha_n (a_{1n}u_1 + \ldots + a_{mn}u_m)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + \ldots + \alpha_n a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \ldots + \alpha_n a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

dann gilt: $\beta_i \, (j = 1, \ldots, m)$ ist der Koeffizient von u_j in der Basisdarstellung von f (x)

<u>Satz:</u> Ist f:V$\rightarrow$U eine lineare Abbildung und sind B,C Basen von V bzw. U, dann gibt es eine Matrix A so, dass gilt:

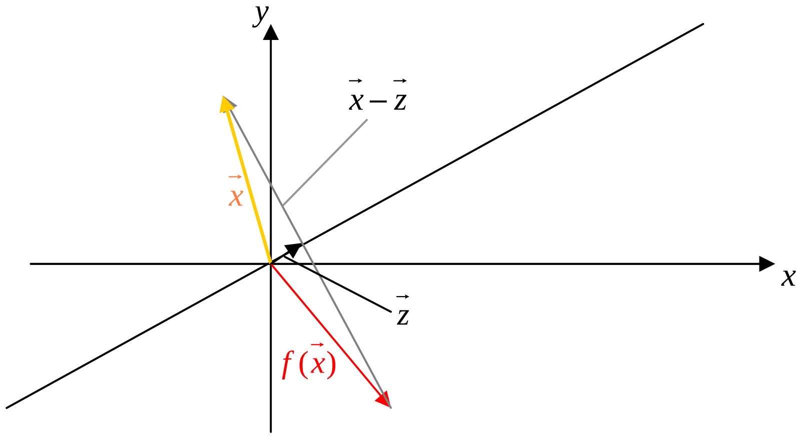
$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Koeffizienten der Basisdarstellung in V mit der Basis B und $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die Koeffizienten der Basisdarstellung in U mit der Basis C sind.

<u>Die Matrix A heißt:</u>

<u>Abbildungsmatrix von f bzgl. der Basen B und C</u>

<u>Beispiel:</u> Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden x = y



Es sei: $\vec{z}$ = Proj ($\vec{x}$:g), wobei g die Spiegelgerade x = y ist.

dann gilt: $f(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x} - \vec{z})$ $= \vec{x} - 2(\vec{x}$ Proj ($\vec{x}$:g))

Sei $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^2$ ein normierter Richtungsvektor von g, d.h.

$$\left|\vec{\vartheta}\right| = 1, \quad \vec{\vartheta} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{etwa} \qquad \vec{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dann gilt: $\vec{z}$ = Proj ($\vec{x}$:g) = $\left(\vec{\vartheta} \circ \vec{x}\right)\vec{\vartheta}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Damit erhält man:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x \cdot u + y \cdot v)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x - 2x + 2(xu + yv)u \\ y - 2y + 2(xu + yv)v \end{pmatrix}$$

Wir suchen eine Matrix A $\in \mathbb{R}^{(2,2)}$ so, dass gilt:

$f\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \overset{-x}{\cancel{x - 2x}} + 2(xu + yv)u \\ \underset{-y}{\cancel{y - 2y}} + 2(xu + yv)v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2(xu + yv)u \\ -y + 2(xu + yv)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(2u^2 - 1\right)x + 2uvy \\ \left(2v^2 - 1\right)y + 2uvx \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \left(2u^2 - 1\right) & 2uv \\ 2uv & 2v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{pmatrix} \left(2u^2 - 1\right) & 2uv \\ 2uv & 2v^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(2u^2 - 1\right)x & 2uvy \\ 2uvy & \left(2v^2 - 1\right)y \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

$A = A^T$ *(A symmetrisch)*

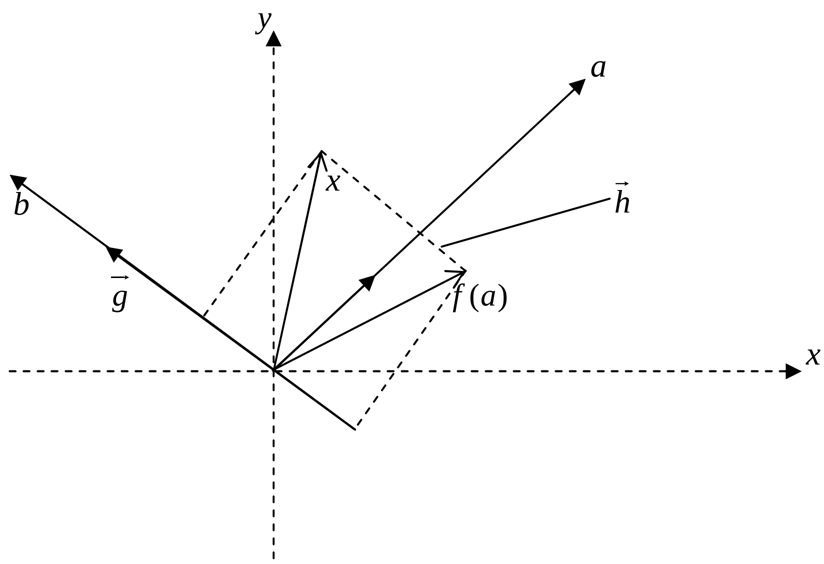
$$\det A = \begin{vmatrix} 2u^2-1 & 2uv \\ 2uv & 2v^2-1 \end{vmatrix} = (2u^2-1)(2v^2-1)4u^2v^2$$

$$= \cancel{4u^2v^2} - 2u^2 - 2v^2 + 1 \cancel{-4u^2v^2}$$

$$= 1 - 2(u^2+v^2) = 1 - 2\left|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|^2 = 1-2 = -1$$

$$\left|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2 \qquad 1^2 = 1$$

Darstellung von f mit einem „besseren“ Koordinatensystem:



Wir wählen die Spiegelgerade g als „neue“ a-Achse und die b-Achse
Senkrecht zu g, nun gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ -bb \end{pmatrix} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Bemerkung: *Sei* $\vec{g}$ *ein Richtungsvektor der b-Achse und* $\vec{h}$ *ein Richtungsvektor Der a-Achse mit:*

$$\left|\vec{g}\right| = \left|\vec{h}\right| = 1 \quad \Rightarrow f\left(\vec{h}\right) = \vec{h} \quad f\left(\vec{g}\right) = -\vec{g}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung

Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit:

$$\vec{v} \neq 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}: f(\vec{v}) = \alpha \vec{v}$$

Heißt ein Eigenvektor von f. α heißt der Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{v}$

Bemerkung: f bildet aus $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}^n$*, also den selben Raum ab.*

Es sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix.

Eine reelle Zahl α heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$
So gibt, dass $A\vec{v} = \alpha \vec{v}$

$\vec{v}$ heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert α

Berechnung der Eigenwerte einer Matrix $A = \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$A\vec{v} = \alpha \vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \alpha \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} - \alpha I_n \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(A - \alpha I_n)\vec{v} = \vec{0}} \qquad \text{…}\textit{Eigenvektorgleichung}$$

Die Eigenvektorgleichung ist ein homogenes lineares Gleichungssystem
Mit quadratischer Koeffizientenmatrix. Dann gilt:

$$\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \left(A\vec{v} - \alpha I_n\right)\vec{v} = \vec{0} \quad \textit{und} \quad \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\det(A - \alpha I_n) = 0} \qquad \text{…}\textit{Eigenwertgleichung}$$

Die Menge aller Löungen der Eigenvektorgleichung $(A - \alpha I_n)\vec{v} = \vec{0}$ zu einem Eigenwert α ist ein linearer Unterraum und heißt der zum Eigenwert α zugehörige Eigenraum..

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det\left(A - \alpha I_n\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \, oder \; \lambda = -1$$

für λ =1:

$$\left(A - I_n\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum U_1 zu λ =1:

$$U_1 = \text{Span} \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

für λ =-1:

$$\left(A + I_n\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum U_2 zu λ =-1:

$$U_2 = \text{Span} \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beispiel:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\det\left(A - \lambda I_2\right) =$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

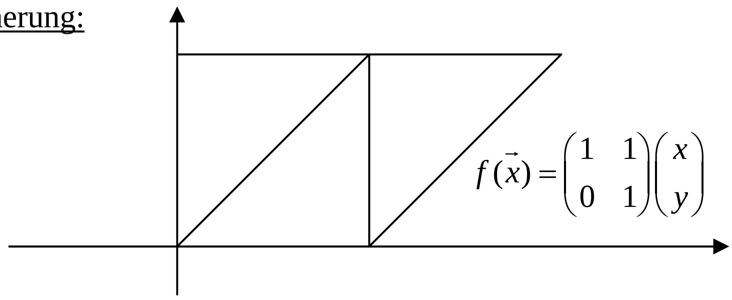
$\lambda = 1$ ist doppelte Nullstelle von $(\lambda - 1)^2$

Eigenraum U zu $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

U = Span $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Scherung:



2. Drehmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Eigenwert: $\det\left(A - \lambda I_2\right) =$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$$

$$= \lambda - 2(\cos\varphi)\lambda + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2(\cos\varphi)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, wenn \left|\cos\varphi\right| \neq 1$$

$\rightarrow$ *Nur wenn* $\varphi = 0$ *oder* $\varphi = \pi$, gibt es reelle Eigenwerte, nämlich:

$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi = \begin{cases} 1 \; \text{\it für} \; \varphi = 0 \\ \\ -1 \; \text{\it für} \; \varphi = \pi \end{cases}$$

…Analogie: Page-ranking

Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten:

(1) Sei A $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ dann ist die rechte Seite der Eigenwertgleichung:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ein Polynom n-ten Grades mit reellem Koeffizienten in λ (charakteristisches Polynom)

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots\ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

mit $n = n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k$ und $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Die Zahl n_i heißt die algebraische Vielfachheit von λ_i

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - I) = (\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 1$ ist 2-facher Eigenwert

(2) Ist λ_i ein Eigenwert der Matrix A $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und

$$L_i = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda_i \vec{x} \right\}$$

der dazugehörige Eigenraum, dann gilt:

$1 \leq \dim L_i \leq$ algebraische Vielfachheit von $\lambda_i = n_i$

$\dim L_i$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ_i

Beispiel:

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

algebraische Vielfachheit von $\lambda_{1,2} = 1$ ist 2

geometrische Vielfachheit von $\lambda_{1,2} = 1$ ist 1

$$L_i = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte einer Matrix A $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und sind $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 dann gilt:

$\vec{v_1}$ *und* $\vec{v_2}$ sind linear unabhängig

Beweis: *Angenommen es wäre nicht so:*

$$A\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1} \qquad (\vec{v_1} \neq \vec{0})$$
$$A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2} \qquad (\vec{v_2} \neq \vec{0})$$
$$\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = \vec{0} \qquad (\alpha, \beta \neq \vec{0})$$

wir betrachten:

$$A\overbrace{\left(\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}\right)}^{=\vec{0}} = \alpha A\vec{v_1} + \beta A\vec{v_2}$$

$$= \alpha\lambda_1\vec{v_1} + \beta\lambda_2\vec{v_2} = \vec{0}$$

$$\alpha\vec{v_1} \quad + \beta\vec{v_2} \quad = \vec{0} \qquad -\lambda_1$$

$$\beta\underbrace{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}_{\neq o}\vec{v_2} = 0$$

(4) Es sei A $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine symmetrische Matrix, d.h. A^T=A, dann gilt:

(i) Alle Werte sind reell

(ii) Für jeden Eigenwert gilt:

algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit

(iii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: (i) Sei $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$

Ferner sei: $$\overline{\vec{v}} := \begin{pmatrix} \overline{\vec{v_1}} \\ \overline{\vec{v_2}} \\ \vdots \\ \overline{\vec{v_n}} \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{v} \in \mathbb{C}^n$$

u = 2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

$$\overline{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \overline{1+i} \\ \overline{2-3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{\vec{v}}^T A\vec{v} &= \overline{\vec{v}}^T \left(A\vec{v}\right) \\ &= \overline{\vec{v}}^T \left(\lambda\vec{v}\right) \\ &= \overline{\vec{v}}^T \underbrace{\left(\overline{\vec{v}}^T \vec{v}\right)}_{reell,>0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\vec{v}}^T A\vec{v} &= \overline{\vec{v}}^T A^T \vec{v} \\ &= \left(\overline{\vec{v}}^T \overline{A}^T\right)\vec{v} \\ &= \overline{\left(A\vec{v}\right)}^T \vec{v} \\ &= \overline{\lambda}\, \underbrace{\overline{\vec{v}}^T \vec{v}}_{reell,>0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$$

(5) Ist A $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine symmetrische Matrix, dann existiert eine Orthonormalbasis $B = \left\{\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right\}$ *des* $\mathbb{R}^n$, welche aus Eigenvektoren A besteht. *…folgt aus (4)*

Sei T = $\left(\overrightarrow{v_1} \,|\, \overrightarrow{v_2} \,|\ldots|\, \overrightarrow{v_n}\right)$

$$\Rightarrow T^T AT = T^T \left(\lambda_1\overrightarrow{v_1} \,|\, \lambda_2\overrightarrow{v_2} \,|\ldots|\, \overrightarrow{\lambda_n v_n}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \vec{v_1}^T \\ \vec{v_2} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{pmatrix}\left(\lambda_1\vec{v_1} \mid \lambda_2\vec{v_2} \mid \ldots \mid \overline{\lambda_n v_n}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1\vec{v_1}^T v_1 & \lambda_2\vec{v_1}^T v_2 & \vdots & \lambda_n\vec{v_1}^T v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \lambda_i\vec{v_i}^T v_i & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 0\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\lambda_2\ldots\ldots\ldots 0 \\ 00\lambda_3\ldots\ldots\ldots 0 \\ 00\ldots\ldots\ldots\lambda_n \end{pmatrix}=D$$

Beweis:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)^2-9=0$$

$$=\lambda^2-4\lambda+4-9=0$$

$$\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3=\begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases} \qquad \lambda_1=5 \quad \lambda_2=-1$$

zugehörige Eigenräume: $\lambda_1=5 \quad u=v$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$L_1=Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{\lambda_2=-1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow u=-v$$

$$L_2=Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Orthonormalbasis aus EV:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ist Orthogonal –aber nicht Orthonormalbasis

$\rightarrow$ *Normieren*:

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$T^TAT=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=D$$

Anwendung auf quadratische Gleichungen im $\mathbb{R}^2$

wir betrachten eine quadratische Gleichungen:

$ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Transformation in Matrixform

$$(x,y)\underbrace{\begin{pmatrix}a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=d \qquad \text{(Beachte: } A^T = A \text{ !!)}$$

gemäß (5) existiert eine Matrix $T\in\mathbb{R}^2$ so, dass

(1) Die Spalten von T bilden eine ONB des $\mathbb{R}^2$

(2) $T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A sind.

Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *und* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, dann ist

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \cdot \vec{t}_1 + v \cdot \vec{t}_2, \quad wobei \quad T = (\vec{t}_1 \,|\, \vec{t}_2)$

(Beachte: $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2\}$ ist ONB von $\mathbb{R}^2$)

$\Rightarrow$ u und v sind die neuen Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzg. des Koordinatensystems, welches von den Vektoren $\vec{t}_1$ *und* $\vec{t}_2$ gebildet wird.

$\Rightarrow$ Die quadratische Gleichung (x,y)A$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = d erhält in dem von $\vec{t}_1$ *und* $\vec{t}_2$ gebildeten Koordinatensystem die Gestalt:

$$\left(T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)^T A\left(T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

$$= (u,v)T^T AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= (u,v)D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = d$$

Wiederholung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

Matrixdarstellung

$$= (x, y)\underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d$$

$$\vec{x}^T A\vec{x} = d$$

Eigenschaften von A:

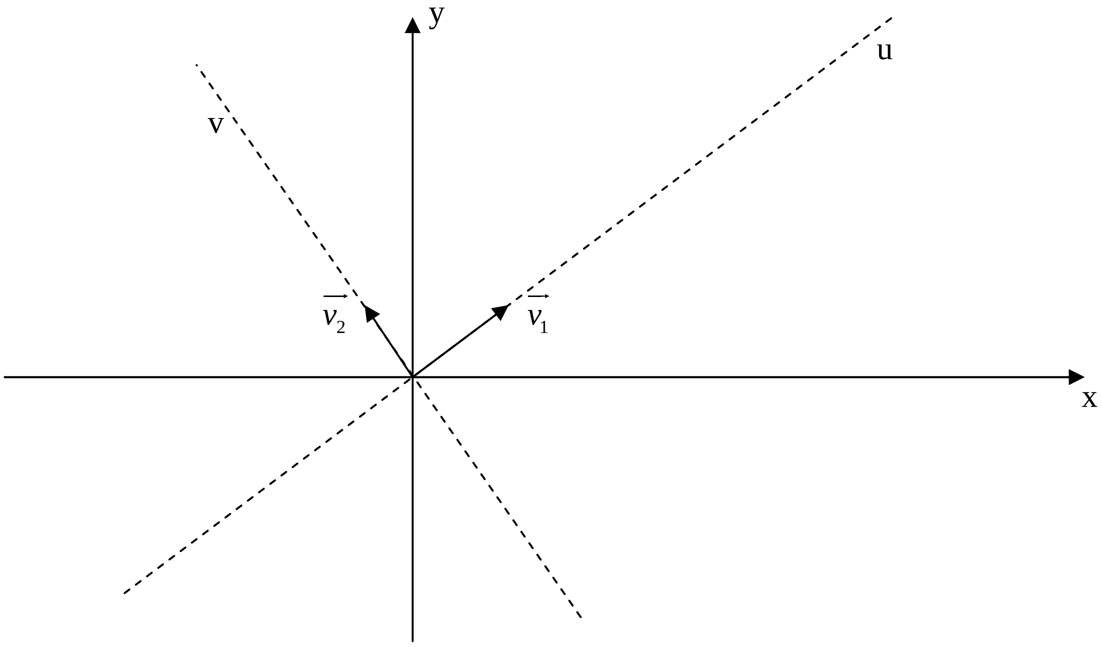
$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\left(da\ A = A^T\right)$$

a: Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gibt es Eigenvektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ zu λ_1 bzw. λ_2 so, dass $\vec{v_1} \circ \vec{v_2} = 0$

b: Falls $\lambda_1 = \lambda_2$ existiert ein 2-dimensionaler Eigenraum $\rightarrow$ Es existiert ONB $\left\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\right\}$

$$(u, v)D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = d \qquad \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = d$$

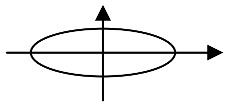
Gleichung in Hauptachsenform:



Klassifizierung quadratischer Gleichungen in Hauptachsenform:

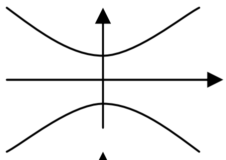
1. Fall: rg (A) = 2 $\Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0 \quad \& \quad \lambda_2 \neq 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *Ellipse*

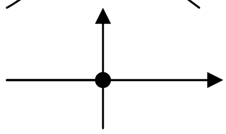


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ *leere Menge*

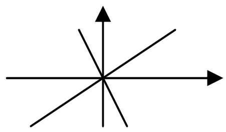
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *Hyperbel*



$x^2 + a^2 y^2 = 0$ *Punkt*

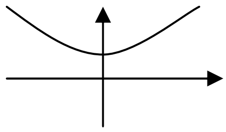


$x^2 - a^2 y^2 = 0$ *Geradenpaar durch 0*

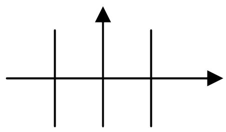


2. Fall: rg (A) = 1 $\lambda_1 = 0$

$x^2 - 2py = 0$ *Parabel*

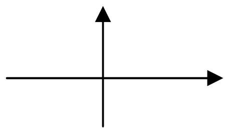


$x^2 - a^2 = 0$ *Geradenpaar*



$x^2 + a^2 = 0$ *leere Menge*

$x^2 = 0$ *Gerade*



$\Rightarrow$

$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$			
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	d > 0	Ellipse
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	d < 0	leere Menge
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	d ≠ 0	Hyperbel
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	d = 0	Punkt (0,0)
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	d = 0	Geradenpaar

$\Rightarrow$

$\lambda_1 = 0; \lambda_2 > 0$	
d < 0	leere Menge
d > 0	paralleles Geradenpaar
d = 0	Gerade x = 0
$\lambda_1 = 0; \lambda_2 < 0$	
d > 0	leere Menge
d < 0	paralleles Geradenpaar
d = 0	Gerade

1. Beispiel:

$$13x^2 - 10xy + 13xy^2 = 288$$

$$(x, y)\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 288 \quad \textit{Gleichung in Matrixform}$$

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 \\ -5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 26\lambda + 169 - 25 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 13 \pm \sqrt{169-144} = 13 \pm 5$$

$$\lambda_1 = 8; \lambda_2 = 18$$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 8$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\lambda_2 = 18$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

normierte Eigenvektoren:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow T^T A T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

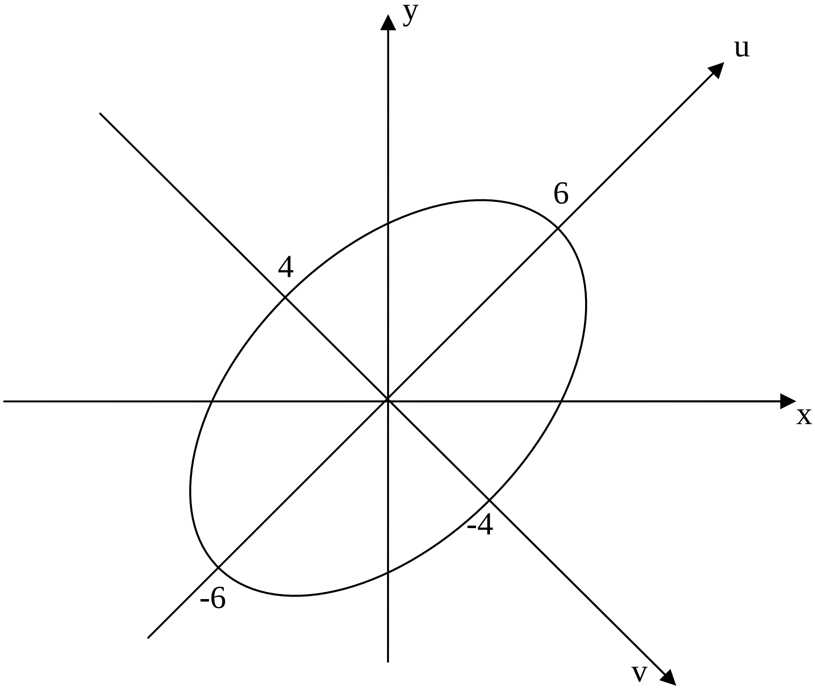
$$(u,v)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 288$$

$8u^2 + 18v^2 = 288$ *Gleichung in Hauptachsenform*

$v = 0 \quad 8u^2 = 288 \quad \Rightarrow \quad u = \pm 6$

$u = 0 \quad 18v^2 = 288 \quad \Rightarrow \quad v = \pm 4$

Skizze:



2. Beispiel:

$9x^2 - 24xy + 16y^2 = 175$

$$(x,y)\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 175$$ *Gleichung in Matrixform*

Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(16-\lambda) - 144 = 0$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 144 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 25\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 25$$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9x = 12y; $\qquad x = \frac{12}{9}\frac{4}{3}y \qquad \Rightarrow L_1 = Span\left\{\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = 25$ $\qquad \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9x = -12y; $\qquad x = -\frac{3}{4}y \qquad \Rightarrow L_2 = Span\left\{\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

normierte Eigenvektoren:

$$\left|\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(16/8\right)+1} = \sqrt{25/9} = \frac{5}{3} \qquad \vec{v}_1 = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(9/16\right)+1} = \sqrt{35/16} = \frac{5}{4} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow T^T A T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$(u, v)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 175$$

$25v^2 = 175$; $v^2 = 7$ *Gleichung in Hauptachsenform*