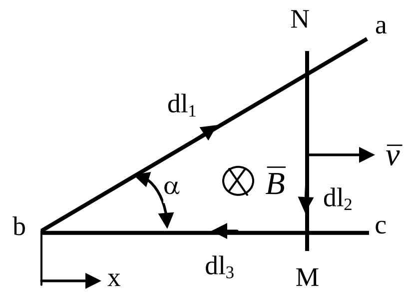
04.01.01 In einem homogenen magnetischen Feld mit der konstanten Magnetflussdichte B befindet sich ein zu einem Winkel α gebogener leitender Draht (abc), auf dem ein Leiter (NM) mit der konstanten Geschwindigkeit v schleift (für t = 0 ist x = 0). Die Magnetflussdichte durchsetzt die Zeichenebene in der skizzierten Richtung senkrecht. Wie groß ist die induzierte Spannung U_i (Betrag und Richtung)?



a) Lösen Sie die Aufgabe unter dem Gesichtspunkt der Veränderung des verketteten Flusses.

b) Berechnen Sie die Spannung vom Standpunkt der Bewegungsinduktion aus.

Lösung:

a) $u_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} B \cdot A(t)$;

Voraussetzung für ψ = +ϕ ist, dass die zu B senkrechte Fläche in Richtung der Flussdiche orientiert wird (Rechtsverkopplung!).

A(t) = $\frac{x(t) \cdot l(t)}{2}$; $\quad x(t) = v \cdot t; \quad l(t) = x(t) \cdot \tan\alpha \rightarrow A(t) = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot t^2 \cdot \tan\alpha$

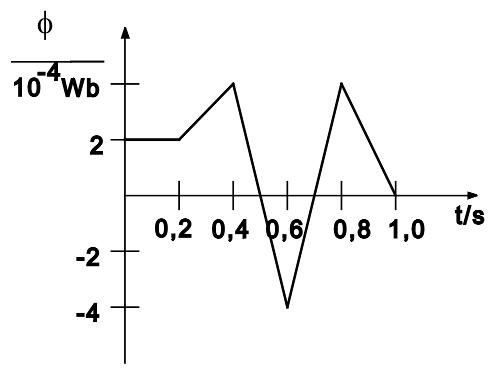
$$u_i = -B \cdot v^2 \cdot \tan\alpha \cdot \frac{d}{dt}\frac{t^2}{2} = \underline{\underline{-B \cdot v^2 \cdot \tan\alpha \cdot t}}$$

b) $u_i = \oint (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl} = \int_1^2 (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl}_1 + \int_2^3 (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl}_2 + \int_3^1 (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot \overline{dl}_3$

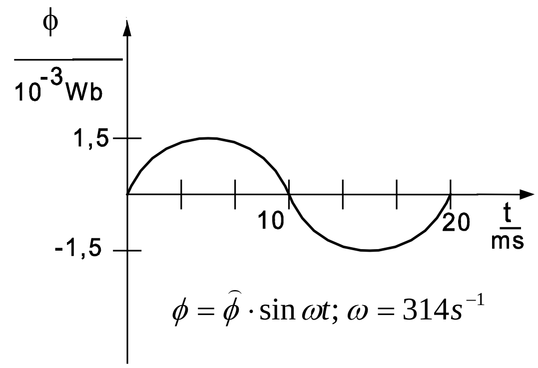
$\overline{v}$ *senkrecht auf* $\overline{B}$; $\quad \overline{v \times B}$ *antiparallel zu* $\overline{dl}_2$; $\quad v = 0$ *für* $\overline{dl}_1; \overline{dl}_3$

$$u_i = -\int_0^{l(t)} vBdl_2 = -vBl(t) = -v \cdot B \cdot vt \cdot \tan\alpha = \underline{\underline{-v^2 \cdot B \cdot t \cdot \tan\alpha}}$$

04.01.04 Der eine einfache Leiterschleife durchsetzende Fluß ϕ hat den dargestellten zeitlichen Verlauf a) bzw. b). Welchen zeitlichen Verlauf hat jeweils die induzierte Umlaufspannung; wie groß ist der jeweilige Maximalwert? Stellen Sie die Umlaufspannungen in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar (Der Fluß ist in Richtung der aufgespannten Fläche positiv).



a)



b)

Lösung:

$$u = -\frac{d\psi}{dt} = -w \cdot \frac{d\phi}{dt} \;;$$

a) für unterschiedliche Geraden abschnittsweise behandeln; w =1;
Ableitung $\widehat{=}$ Anstieg:

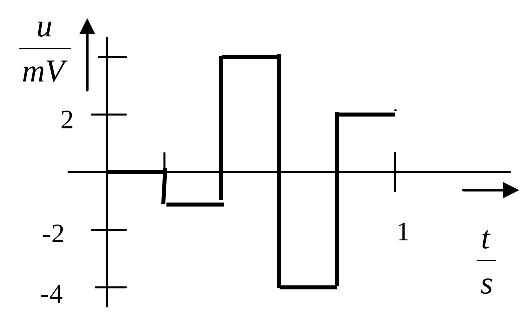
$t = 0 \ldots 0{,}2s: \quad u = 0$

$t = 0{,}2s \ldots 0{,}4s: \quad u = -\dfrac{2 \cdot 10^{-4} Vs}{0{,}2s} = -1mV$

$t = 0{,}4s \ldots 0{,}6s: \quad u = +\dfrac{8 \cdot 10^{-4} Vs}{0{,}2s} = +4mV$

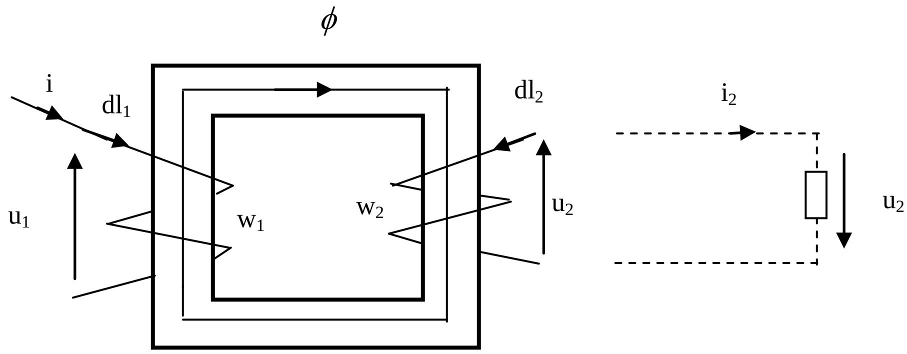
$t = 0{,}6s \ldots 0{,}8s: \quad u = -\dfrac{8 \cdot 10^{-4} Vs}{0{,}2s} = -4mV$

$t = 0{,}8s \ldots 1s: \quad u = +\dfrac{4 \cdot 10^{-4} Vs}{0{,}2s} = +2mV$



b) $u = -\dfrac{d}{dt}\hat{\phi} \cdot \sin \omega t = -\omega \cdot \hat{\phi} \cdot \cos \omega t = -314 s^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} Vs \cdot \cos \omega t = \underline{\underline{-471 mV \cdot \cos \omega t}}$

04.01.05 Gegeben ist ein Eisenkern (μ_r sei konst.) mit zwei Wicklungen. Die erste Wicklung wird vom Strom i =Î sinωt durchflossen. Die mittlere Eisenweglänge l_{Fe} und der Eisenquerschnitt A_{Fe} sowie die Windungszahl der Wicklungen sind sind bekannt. Berechnen Sie den magnetischen Widerstand R_m, den magnetischen Fluß ϕ, die verketteten Flüsse ψ_1 und ψ_2 sowie die Klemmenspannungen in den Wicklungen.



Lösung: $$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_{rFe} \cdot \mu_0 A_{Fe}}; \quad \phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{w \cdot i}{R_m};$$

Rechtsverkopplung: $\psi_1 = w_1 \cdot \phi; \quad \psi_2 = w_2 \cdot \phi$

$$\sum_n u_{in} = \oint \overline{E} \cdot \overline{dl} = -\frac{d\psi}{dt} = \sum_m u_{1m} \rightarrow$$

$$u_{i1} = -\frac{d\psi_1}{dt} = -w_1 \frac{d\phi}{dt} = -\frac{w_1^2}{R_m} \cdot \frac{di}{dt} = \underline{\underline{-\frac{w_1^2}{R_m} \cdot \hat{I} \cdot \omega \cdot \cos\omega t = u_1}}$$

Zu beachten ist, dass alle Spannungen in Bezug auf das dl (dl und Fluss rechtsverkoppelt!)zu orientieren sind. Da die Klemmenspannung mit negativem Vorzeichen herauskommt, ist sie offensichtlich anders gerichtet. Die Richtungen von Strom und Spannung stimmen überein – der Trafo ist eingansseitig ein Verbraucher.
Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Richtungen ist die Lenz'sche Regel: Die induzierte Spannung (Antriebsgröße) würde hier zu einem Strom entgegen dl_1 führen. Diese Stromrichtung zeigt die Richtung der Klemmenspannung in der Masche.

$$u_{i2} = -\frac{d\psi_2}{dt} = -w_2 \frac{d\phi}{dt} = -\frac{w_1 w_2}{R_m} \cdot \frac{di}{dt} = \underline{\underline{-\frac{w_1 w_2}{R_m} \cdot \hat{I} \cdot \omega \cdot \cos\omega t = u_2}}$$

Sekundärseitig erhält u_2 bei Orientierung in Richtung dl_2 (Rechtsverkopplung mit Fluss!)ebenfalls ein negatives Vorzeichen. u_2 ist also eigentlich entgegengesetzt gerichtet. Schlösse man einen Verbraucher an, würde der Strom entgegen dl_2 fließen und die am Verbraucher abfallende Spannung würde ebenfalls in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Strom durch Wicklung und Spannung am Verbraucher wären also entgegengesetzt gerichtet : der Trafo ist am Ausgang eine Quelle.

04.01.08 a) Ermitteln Sie die in der Leiterschleife ABCD induzierte Spannung. Die Anordnung ist von Luft umgeben. Der Leiter sei unendlich lang und wird vom Strom i = Î sinωt durchflossen.

I = 3 A

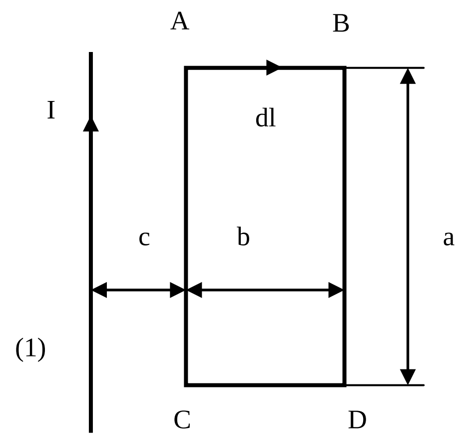
$\omega = 314\ s^{-1}$

c = 10 cm

a = 40 cm

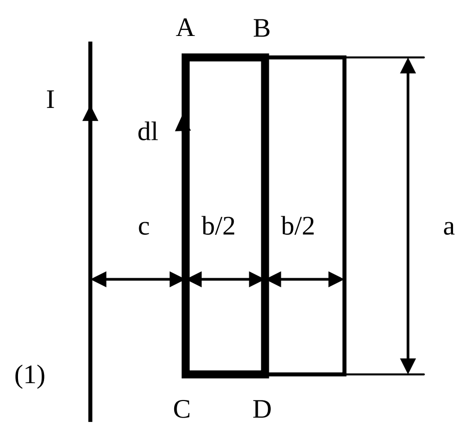
b = 20 cm

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m



b) Wie ändert sich der verkettete Fluß für die folgende Struktur der Leiterschleife?

(Leiterschleife wie oben, aber in einer weiteren Windung ABCD weitergeführt, so dass sich für den stärker gezeichneten Teil eine Windungszahl N = 2 ergibt.)



Lösung: a) $u_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}; \quad \phi = \int \overline{B} \cdot \overline{dA}; \quad B = \mu_0 \cdot H; \quad H = \frac{i}{2\pi r}$

$$u_i = -\frac{d}{dt}\int \mu_0 \frac{i}{2\pi r} dA = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{d}{dt} i \int_c^{c+b} \frac{1}{r} a dr = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\frac{c+b}{c}\frac{di}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{c+b}{c}\hat{I}\omega\cos\omega t$$

$$u_i = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} Vs \cdot 0{,}4m \cdot \ln 3 \cdot 3A \cdot 314 s^{-1}}{Am \cdot 2\pi}\cos\omega t = \underline{\underline{-82{,}8\mu V \cdot \cos\omega t}}$$

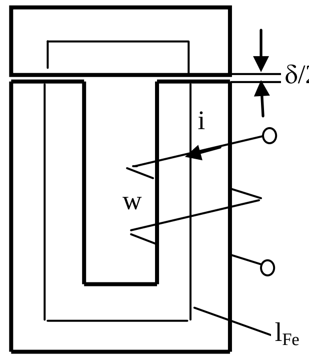
Lösung Aufgabe 04.01.08/Seite 2

b)

$$u_i = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\frac{d}{dt}i\left(2\cdot\ln\frac{c+\frac{b}{2}}{c}+\ln\frac{c+b}{c+\frac{b}{2}}\right) = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(2\cdot\ln\frac{c+\frac{b}{2}}{c}+\ln\frac{c+b}{c+\frac{b}{2}}\right)\cdot\omega\cdot\hat{I}\cdot\cos\omega t$$

$$u_i = -2\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot 0{,}4m\cdot\left(2.\ln 2+\ln 1{,}5\right)\cdot 314s^{-1}\cdot 3A\cdot\cos\omega t = \underline{\underline{-135\mu V\cdot\cos\omega t}}$$

04.01.10 Gegeben ist ein Kern UI60 (l_{Fe} = 24 cm; $A_{Fe} = A_\delta$ = 6 cm^2; μ_{rFe} = 1000; $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$H/m; δ = 1 mm; σ = 0,3). Welche Spannung wird in der Wicklung mit w = 1000 Windungen induziert, wenn ein Strom i = 2A sin(314 s^{-1} t) durch die Wicklung fließt?



Lösung: $$u_i = -\frac{d\psi}{dt} = -w\frac{d\phi}{dt} = -w\frac{d}{dt}\frac{\Theta}{R_m} = -\frac{w^2}{R_m}\frac{di}{dt} = -\frac{w^2}{R_m}\omega\cdot\hat{I}\cdot\cos\omega t$$

$$R_m = R_{mFe} + R_{m\delta\sigma} = \frac{l_{Fe}}{\mu_0\mu_{rFe}A_{Fe}} + \frac{\delta(1-\sigma)}{\mu_0 A_\delta}$$

$$= \frac{0{,}24m}{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}1000\cdot 6\cdot 10^{-4}m^2} + \frac{1\cdot 10^{-3}m\cdot 0{,}7}{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot 6\cdot 10^{-4}m^2} = 0{,}318\cdot .10^6\frac{A}{Vs} + 0{,}928\cdot 10^6\frac{A}{Vs}$$

$$R_m = 1{,}246\cdot 10^6\frac{A}{Vs}$$

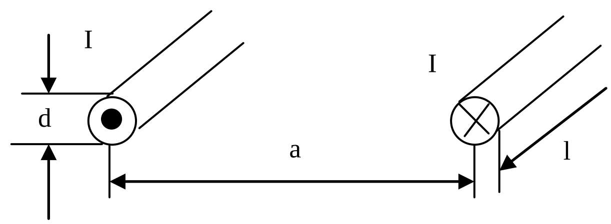
$$u_i = -\frac{10^6}{1{,}246\cdot 10^6\frac{A}{Vs}}\cdot 314s^{-1}\cdot 2A\cdot\cos\omega t = \underline{\underline{-504\,V\cdot\cos\omega t}}$$

04.02.01 Es ist die äußere Induktivität L_a einer Paralleldrahtleitung zu berechnen.

d = 10 mm

a = 1 m

l = 1 km



Lösung:

$$L_a = \frac{\psi}{I} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{I} = \frac{2\phi}{I}$$

$$mit \quad \phi = \int BdA; \quad B = \mu_0 \cdot H; \quad H = \frac{I}{2\pi r}; \quad dA = ldr \quad fo\lg t:$$

$$L_a = \frac{2 \cdot I\mu_0}{I \cdot 2 \cdot \pi} \int_{d/2}^{a-d/2} \frac{1}{r} l \cdot dr = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \ln \frac{a - \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} 1000m}{\pi} \cdot \ln \frac{1 - 0{,}005}{0{,}005} = \underline{\underline{2{,}1\, mH}}$$

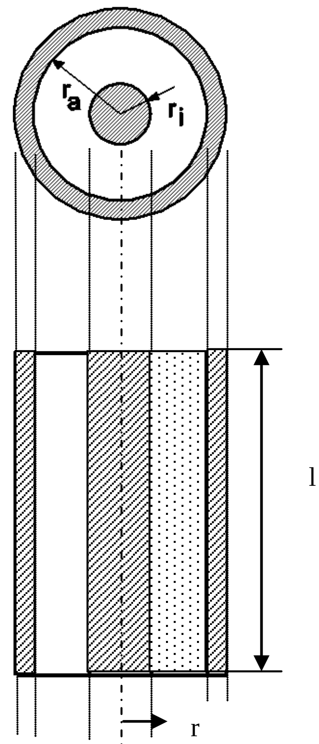
04.02.02 Wie groß ist die äußere Induktivität L_a eines konzentrischen Kabels der Länge l?

r_i = 0,5 mm

r_a = 4 mm

l = 15 m

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m



Lösung: $L = \frac{\psi}{I} = \frac{\phi}{I} = \frac{1}{I}\int \overline{B} \cdot \overline{dA}; \quad \overline{B} // \overline{dA}$ für

dA = ldr

äußere Induktivität heißt: es werden nur stromfreie Gebiete berücksichtigt:

$$L_a = \frac{1}{I}\int \mu_0 \cdot H \cdot dA = \frac{1}{I}\int \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot l \cdot dr$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi}\int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \cdot \ln\frac{r_a}{r_i} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am} \cdot 15m}{2\pi} \cdot \ln\frac{4}{0{,}5} = \underline{\underline{6{,}24\ \mu H}}$$

04.02.03 Für den skizzierten Magnetkreis sind die angegebenen Abmessungen und Kenngrößen bekannt:

$l_{Fe} = 12$ cm

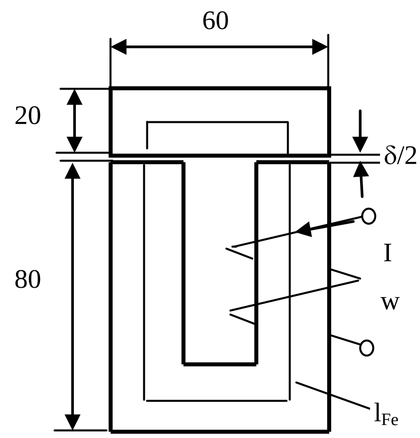
$A_{Fe} = A_\delta = 3$ cm^2

$\delta = 0{,}1$ mm; $\sigma = 0{,}1$

$\mu_r = 1200$

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

N = 200



Berechnen Sie die Induktivität der Anordnung.

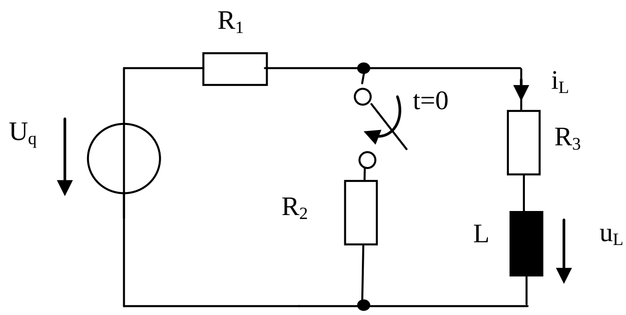
Lösung: $L = \dfrac{\psi}{I} = N\dfrac{\phi}{I} = N\dfrac{\Theta}{R_m \cdot I} = N\dfrac{N \cdot I}{R_m \cdot I} = \dfrac{N^2}{R_m}$

$$R_m = R_{mFe} + R_{m\delta} = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_{rFe} A_{Fe}} + \frac{\delta(1-\sigma)}{\mu_0 A_\delta}$$

$$= \frac{0{,}12m}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} 1200 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\, m^2} + \frac{1 \cdot 10^{-4}\, m \cdot 0{,}9}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\, m^2} = 265{,}3 \cdot .10^3\,\frac{A}{Vs} + 238{,}7 \cdot 10^3\,\frac{A}{Vs}$$

$$L = \frac{4 \cdot 10^4}{504 \cdot 10^3\,\frac{A}{Vs}} = \underline{\underline{79{,}4\ mH}}$$

04.03.01 Bestimmen Sie die Anfangs- und stationären Endwerte für alle Ströme und Spannungen in der folgenden Schaltung. Für t < 0 ist das Netzwerk im stationären Zustand. Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ.
Geben Sie den zeitlichen Verlauf von $u_L(t)$ und $i_L(t)$ an.



Lösung: (2 Seiten)

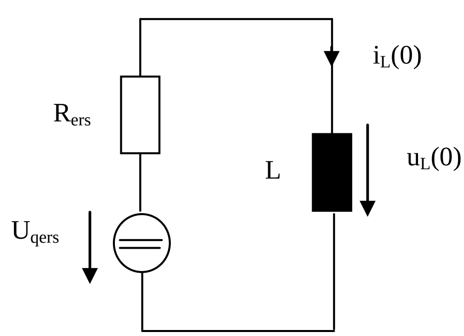
$$x(t) = x(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + x(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \qquad \tau = \frac{L}{R_{ers}} = \frac{L}{R_3 + \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1}}$$

Lösungsgleichung gilt für alle Ströme und Spannungen. Dafür Berechnung der Anfangs- und Endwerte.

t = 0: $i_L(+0) = i_L(-0)$

$$i_L(t<0) = \frac{U_q}{R_1 + R_3} \rightarrow i_L(0) = \frac{U_q}{R_1 + R_3};$$

Bestimmung von $u_L(0)$ mit Hilfe der Zweipoltheorie:



$$U_{qers} = \frac{U_q \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_{ers} \quad \text{siehe } \tau$$

$$u_L(0) = U_{qers} - R_{ers} \cdot i_L(0) = \frac{U_q R_2}{R_1 + R_2} - \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) \cdot \frac{U_q}{R_1 + R_3}$$

$$= \frac{U_q R_2 (R_1 + R_3) - U_q R_3 (R_1 + R_2) - U_q R_1 R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)} = -\frac{U_q R_3 R_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}$$

Aufg. 04.03.01/S.2

$$u_{R2}(0) = i_L(0) \cdot R_3 + u_L(0) = \frac{U_q R_3}{R_1 + R_3} - \frac{U_q R_3 R_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)} = \frac{U_q R_3 (R_1 + R_2) - U_q R_3 R_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}$$

$$u_{R2}(0) = \frac{U_q R_3 R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}$$

$$i_{R2}(0) = \frac{u_{R2}(0)}{R_2} = \frac{U_q R_3}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}$$

$$i_{R1}(0) = i_{R2}(0) + i_C(0) = \frac{U_q R_3}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)} + \frac{U_q}{R_1 + R_3} = \frac{U_q R_3 + U_q (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)} = \frac{U_q (R_3 + R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}$$

$t \to \infty$:

$$u_L(\infty) = 0$$

$$\to i_L(\infty) = \frac{U_{qers}}{R_{ers}} = \frac{\dfrac{U_q R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{U_q R_2}{R_3 (R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{U_q}{R_1 + R_3 + \dfrac{R_1}{R_2} R_3} \quad < \quad i_L(0)$$

04.03.02

a) Wie groß muß in der gegebenen Schaltung der Löschwiderstand R_p bemessen werden, damit über der Induktivität eine Spannung von 200 V nicht überschritten wird?
(Hinweis: Maximaler Wert der Spannung beim Öffnen des Schalters)

b) Berechnen Sie für die gegebene Schaltung die beim Ein- und Ausschalten über L anliegende Spannung u_L und die Ströme i_1, i_2 und i_3 über die Berechnung der Anfangs- und der stationären Endwerte.

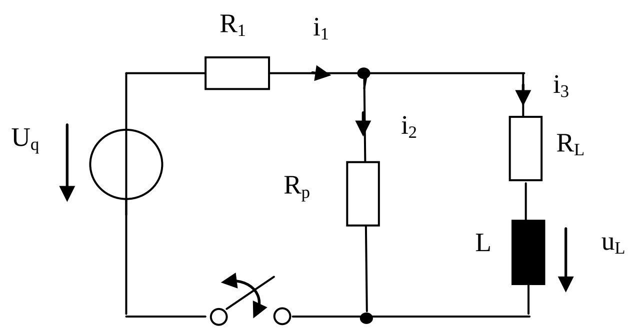
c) Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar.

$U_q = 10$ V

$R_L = 2\ \Omega$

L = 50 mH

$R_1 = 0{,}5\ \Omega$



Lösung: (3 Seiten)

a) Größter Spannungsabfall beim Abschalten:

$$u_L(0) = -i_3(0)(R_L + R_p); \quad i_3(0) = i_3(t<0) = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_p \cdot R_L}{R_p + R_L}} \cdot \frac{R_p}{R_p + R_L} = \frac{U_q \cdot R_p}{R_1(R_p + R_L) + R_p \cdot R_L}$$

$$u_L(0) = -200V = -\frac{U_q \cdot R_p \cdot (R_L + R_p)}{R_1(R_p + R_L) + R_p \cdot R_L}$$

$$200(R_p(R_1 + R_L) + R_1 R_L) = U_q R_p^{\ 2} + U_q R_L R_p$$

$$\frac{200 R_1 R_L}{U_q} = R_p^{\ 2} + R_p(R_L - \frac{200 R_1}{U_q}) \rightarrow R_p^{\ 2} - 48 R_p - 20 = 0 \rightarrow R_p = 24 \pm \sqrt{24^2 + 20} \rightarrow R_p = \underline{\underline{48{,}4\Omega}}$$

b) vorausgesetzt wird, daß vor dem Schalten der stationäre Zustand eingetreten war (t>5τ)

Anschalten: t = 0

$$\tau = \frac{L}{R_L + \frac{R_p \cdot R_1}{R_p + R_1}}$$

$i_3(+0) = i_3(-0) = 0$; $u_L = U_q R_p/(R_p + R_1)$; $i_1 = i_2 = U_q/(R_p + R_1)$

$t \to \infty$:

$u_L = 0$; i_3 siehe oben (Endwert des Anschaltens = Anfangswert beim Abschalten);

$$i_1 = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_p \cdot R_L}{R_p + R_L}}; \quad i_2 = i_1 \cdot \frac{R_L}{R_L + R_p}$$

Abschalten:

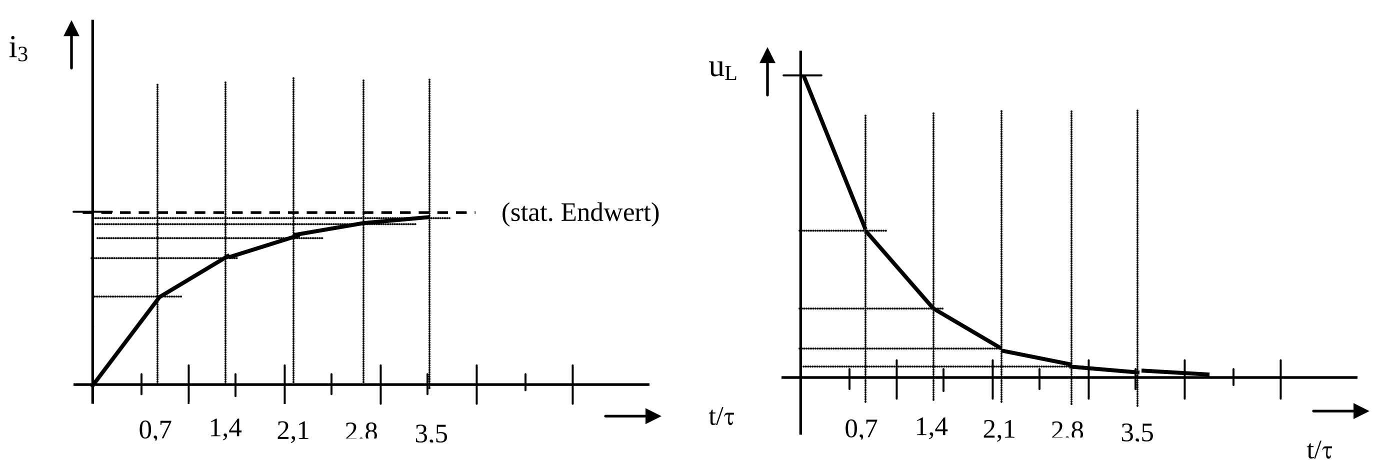
$$\tau = \frac{L}{R_L + R_p}$$

Anfangswerte siehe oben; Endwerte sind Null

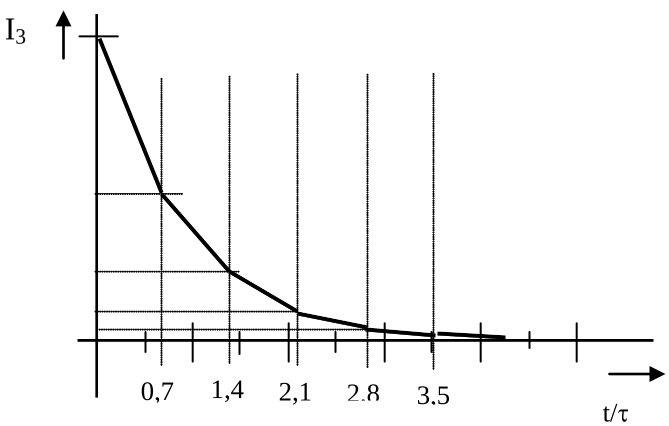
Die Zeitverläufe durch Einsetzen der Anfangs- und Endwerte sowie τ in die allgemeine Lösung der DGL:

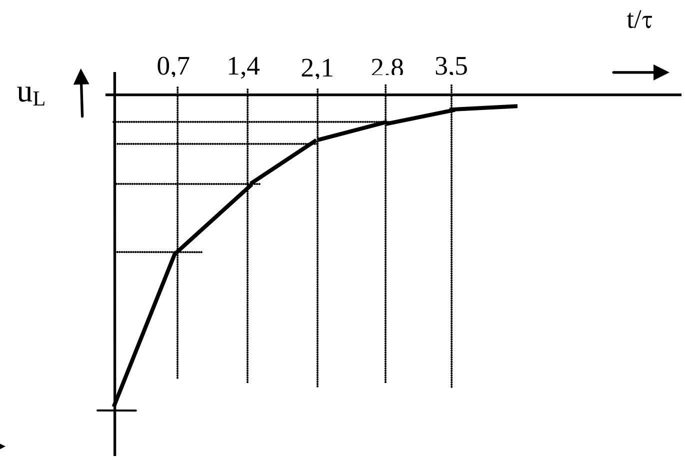
$x = X_\infty(1-e^{-t/\tau}) + X_0\, e^{-t/\tau}$

c) <u>Anschalten</u>: maximaler Strom bei $R_p \to \infty \;\to i_3(\infty) = U_q/(R_1 + R_L)$; maximale Spannung für $R_p \to \infty \to u_L(0) = U_q$

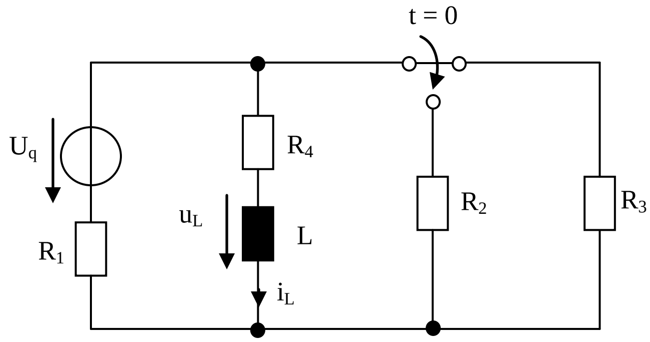


<u>Abschalten:</u> maximaler Strom bei $R_p \rightarrow \infty$ bei t = 0 (entspricht Endwert beim Anschalten)
Maximale Spannung $u_L(0) \rightarrow -\infty$ für $R_p \rightarrow \infty$ (Allgemeiner Ausdruck siehe oben)





04.03.03 Geben Sie Anfangs- und stationäre Endwerte für die Spannung über der Induktivität und den Strom durch die Induktivität an (für t < 0 ist das Netzwerk im stationären Zustand). Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ.



Lösung:

t = 0: $i_L(+0) = i_L(-0)$

---

t < 0: stationärer Zustand $\rightarrow u_L(t<0) = 0$

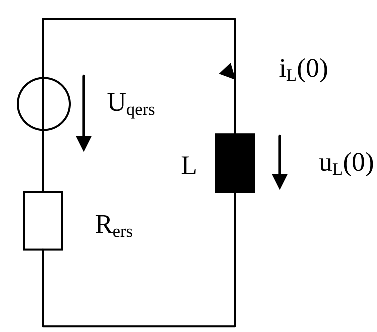
$$\frac{i_L}{i} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}; \quad i = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}} \rightarrow i_L(t<0) = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{U_q \cdot R_3}{R_1(R_3 + R_4) + R_3 \cdot R_4}$$

---

t = 0: $i_L(0) = \dfrac{U_q \cdot R_3}{R_1(R_3 + R_4) + R_3 \cdot R_4}$

Berechnung von $u_L(0)$ über Zweipoltheorie (Schaltung nach dem Schalten!):

$$U_{qers} = \frac{U_q \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_{ers} = R_4 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



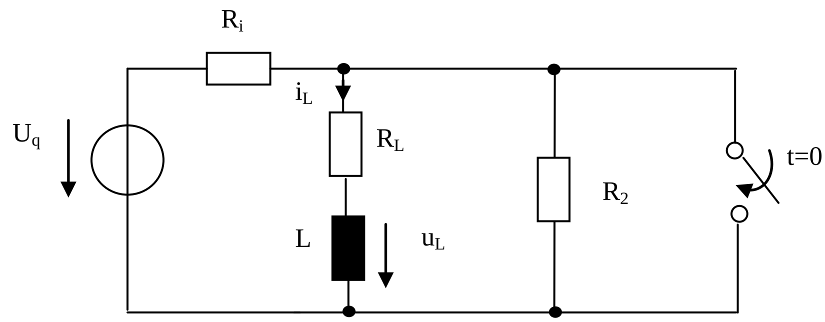
$$u_L(0) = U_{qers} - i_L(0) \cdot R_{ers}$$

$$t \rightarrow \infty: \; u_L(\infty) = 0$$

$$i_L(\infty) = \frac{U_{qers}}{R_{ers}} = \frac{U_q \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{ers}} = \frac{L}{R_4 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

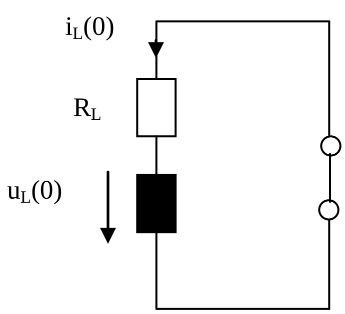
04.03.04 Für das gegebene Netzwerk sind die Anfangs- und stationären Endwerte für Strom durch die und Spannung über der Induktivität zu bestimmen. Geben Sie die zeitlichen Verläufe an. Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ. Für t <0 ist das Netzwerk im stationären Zustand.



$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + i_L(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \qquad \tau = \frac{L}{R_{ers}} = \frac{L}{R_L}$$

$$u_L(t) = u_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + u_L(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t = 0: $i_L(t<0) = \frac{U_{qers}}{R_{ers}} = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \div (\frac{R \cdot R_i}{R + R_i} + R_L) \rightarrow i_L(0) = i_L(t<0) = \frac{U_q \cdot R}{R \cdot R_i + R_L(R + R_i)}$

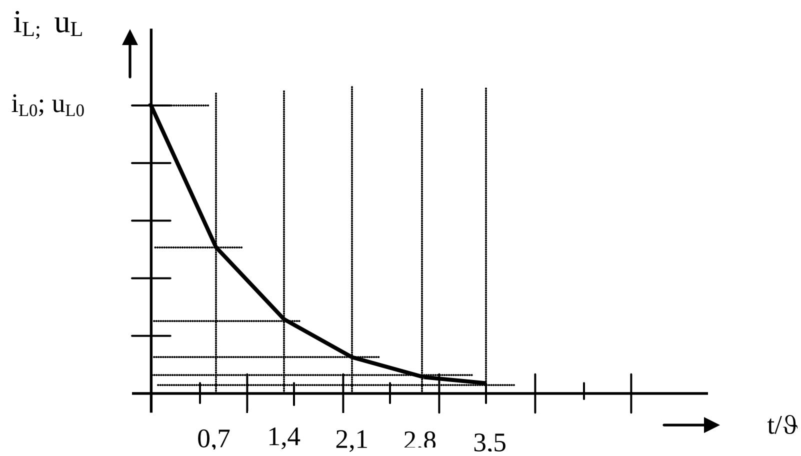


Schalter geschlossen,
damit die parallelen Zweige
kurzgeschlossen

$$u_L(0) = -R_L \cdot i_L(0)$$

$$= -R_L \cdot \frac{U_q \cdot R}{R \cdot R_i + R_L(R + R_i)}$$

$$t \rightarrow \infty: \quad u_L(\infty) = 0; \quad i_L(\infty) = 0$$



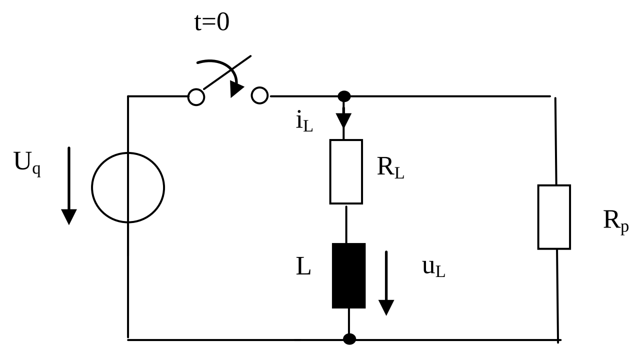
04.03.05 Berechnen Sie $i_L(t)$, wenn der Schalter zum Zeitpunkt t = 0 geschlossen wird (für t < 0 stationärer Zustand). Stellen Sie $i_L(t)$ grafisch dar.

$U_q = 6$ V

$R_p = 100\ \Omega$

$R_L = 20\ \Omega$

L = 10 mH



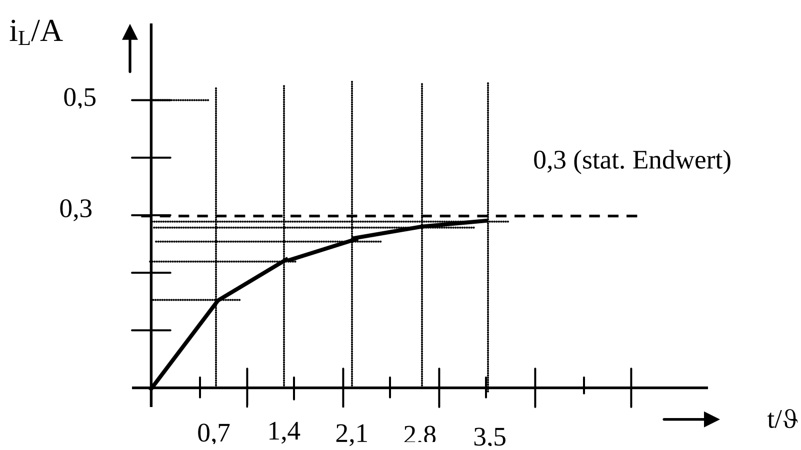
Lösung:

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + i_L(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \qquad \tau = \frac{L}{R_{ers}} = \frac{L}{R_L} = \frac{10\cdot 10^{-3}\,\frac{Vs}{A}}{20\,\frac{V}{A}} = \underline{\underline{0{,}5\ ms}}$$

$R_{ers} = R_L$, weil die ideale Quelle einen Innenwiderstand $R_i = 0$ hat.

$$i_L(t<0) = 0 \rightarrow i_L(0) = 0$$

$$u_L(\infty) = 0 \rightarrow i_L = \frac{U_q}{R_L} = \frac{6V}{20\Omega} = \underline{\underline{0{,}3A}}$$



04.04.01 Wie groß ist die gegenseitige Induktivität L_{12} der gegebenen Anordnung (Leiter schließt sich im Unendlichen)?

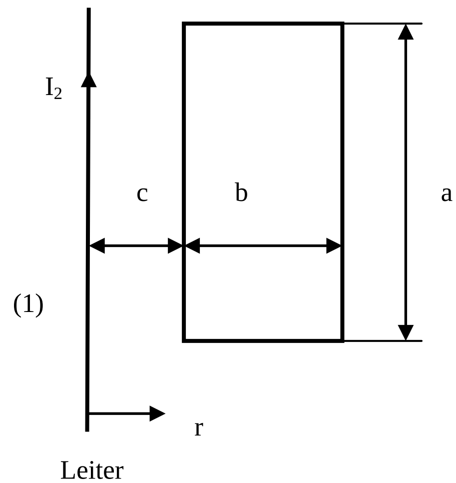
N = 1

a = 40 cm

b = 20 cm

c = 10 cm

$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ H/m



Lösung:

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\phi_{12}}{I_2}; \quad \phi_{12} = \int \overline{B_2} \cdot \overline{dA_1}; \quad B_2 = \mu_0 \cdot H_2; \quad H_2 = \frac{I_2}{2\pi\, r}$$

$$L_{12} = \int \mu_0 \frac{1}{2\pi\ r} dA_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_c^{c+b} \frac{1}{r} a dr = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\frac{c+b}{c} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am} \cdot 0{,}4m}{2\pi} \ln 3 = \underline{\underline{87{,}9\ nH}}$$

04.04.03 Bestimmen Sie für den gegebenen Transformator die Induktivitäten L_1, L_2 der beiden Wicklungen und die gegenseitigen Induktivitäten L_{12} und L_{21}. Zeigen Sie dass $L_{12} = L_{21}$ ist.
Geben Sie die magnetischen Ersatzschaltbilder an.

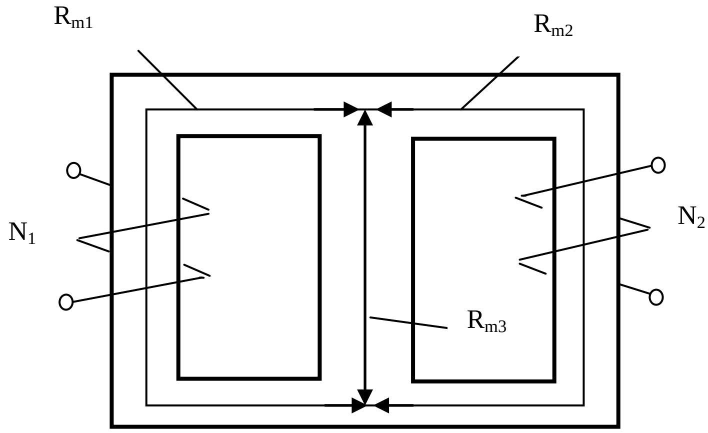
$N_1 = 1000$

$N_2 = 2500$

$R_{m1} = 10^5$ 1/H

$R_{m2} = 4\ 10^5$ 1/H

$R_{m3} = 2\ 10^6$ 1/H



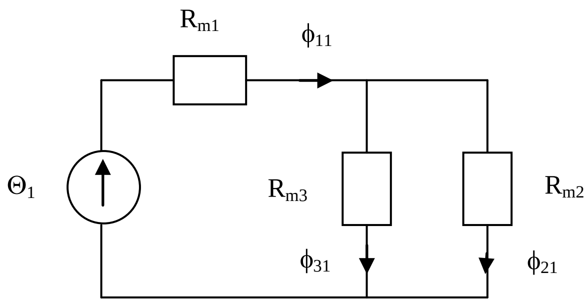
Lösung:

Induktivitäten:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \rightarrow L_1 = \frac{N_1^{\ 2}}{R_{m1} + \dfrac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} = \frac{10^6}{10^5 + \dfrac{20 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^5}{24 \cdot 10^5}} H = \underline{\underline{2{,}3\ H}}$$

$$L_2 = \frac{N_2^{\ 2}}{R_{m2} + \dfrac{R_{m3} \cdot R_{m1}}{R_{m3} + R_{m1}}} = \frac{6{,}25 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^5 + \dfrac{20 \cdot 10^5 \cdot 10^5}{21 \cdot 10^5}} H = \underline{\underline{12{,}62\ H}}$$

gegenseitige Induktivitäten: L_{21}



Zu Seite 2

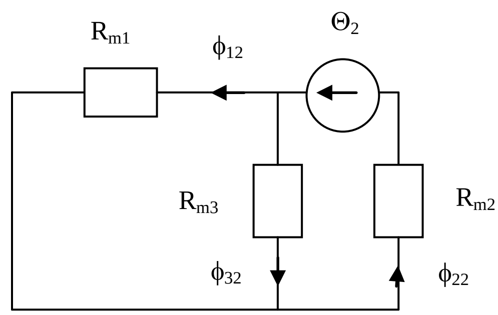
Seite 2/ Aufg. 04.04.03

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = N_2 \cdot \frac{\phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2}{i_1} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} \phi_{11} = \frac{N_2}{i_1} \cdot \frac{\Theta_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}$$

$$= \frac{N_2}{i_1} \cdot \frac{N_1 i_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot R_{m3}}{R_{m1}(R_{m2} + R_{m3}) + R_{m2} \cdot R_{m3}}$$

$$L_{21} = \frac{25 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^5}{10^5 \cdot 24 \cdot 10^5 + 20 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^5} H = \underline{\underline{4{,}8\ H}}$$

gegenseitige Induktivitäten: L_{12}

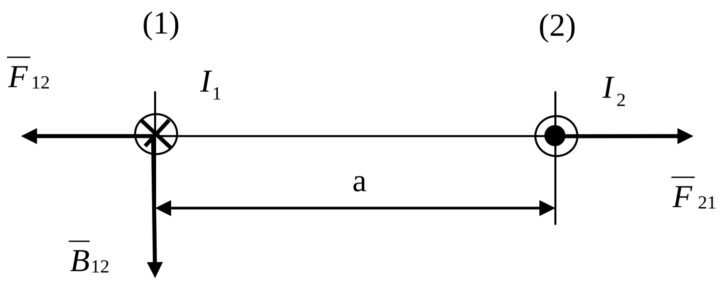


$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} = N_1 \cdot \frac{\phi_{12}}{i_2} = \frac{N_1}{i_2} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} \phi_{22} = \frac{N_1}{i_2} \cdot \frac{\Theta_2}{R_{m2} + \frac{R_{m1} \cdot R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}}} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}}$$

$$= \frac{N_1}{i_2} \cdot \frac{N_2 i_2}{R_{m2} + \frac{R_{m1} \cdot R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}}} \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot R_{m3}}{R_{m1}(R_{m2} + R_{m3}) + R_{m2} \cdot R_{m3}} \equiv L_{21}$$

05.01.01 Zwei parallele Leiter (Freileitung, Abstand a) werden in entgegengesetzter Richtung von einem Strom I durchflossen. Bestimmen Sie Größe und Richtung der auf jeden Leiter wirkenden Kraft, bezogen auf die Leiterlänge.
a = 3,1 m; I = 200 A; $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$

Lösung:



$I_1 = I_2 = I$!!

$\overline{F}_{12} = I_1(\overline{l}_1 \times \overline{B}_{12})$ l_1 in Richtung von I_1

$\overline{B}_{12} = \mu_0 \cdot \overline{H_{12}}$; $H_{12} = \frac{I_2}{2\pi a}$ wegen des zylindersymmetrischen Feldes

$$F_{12} = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l_1 \cdot \mu_0}{2\pi a} \xrightarrow{mit\ F_{12}=F_{21}=F} \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot (200A)^2}{2\pi \cdot 3{,}1m}$$

$$\frac{F}{l} = 2{,}58 \cdot 10^{-3} \frac{VAs}{m^2} = \underline{\underline{2{,}58 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}}}$$

Die Richtungen der Kräfte sind in der Skizze angegeben. Die Leiter stoßen sich ab.

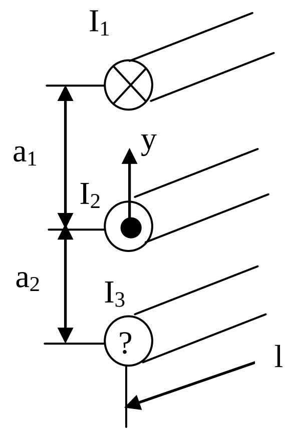
05.01.02 Eine Leiteranordnung wird von verschiedenen Strömen in verschiedenen Richtungen durchflossen .
a) Wie groß muss der Strom I_3 sein und in welche Richtung muss er fließen, damit auf den Leiter 2 keine Kraft wirkt?
b) Welche Kräfte wirken dann auf die Leiter 1 und 3 und welche Richtung haben sie?

I_1 = 2 kA; I_2 = 10 kA

a_1 = 4 cm; a_2 = 3 cm

l = 2 m

$\mu_0 = 4\pi*10^{-7}$ H/m



Lösung:

Das durch den Strom I_3 hervorgerufene Feld muss dem von I_1 hervorgerufenen entgegenwirken, d. h. I_3 muss in die Zeichenebene hineinfließen.

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{21} + \overline{F}_{23} = -\left(I_2 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a_1}\right) \cdot \overline{e}_y + \left(I_2 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_3}{2 \cdot \pi \cdot a_2}\right) \cdot \overline{e}_y$$

$$\rightarrow I_2 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a_1} = I_2 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_3}{2 \cdot \pi \cdot a_2}$$

$$\rightarrow I_3 = I_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} = 2\ kA \cdot \frac{3\,cm}{4\,cm} = \underline{\underline{1{,}5\,kA}}$$

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{12} + \overline{F}_{13}$$

$$F_1 = F_{12} - F_{13} = I_1 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot \left(\frac{I_2}{2\pi\, a_1} - \frac{I_3}{2\pi\,(a_1 + a_2)}\right) = 200 \frac{VAs}{m} - 17{,}1 \frac{VAs}{m} = \underline{\underline{182{,}9\ N}}$$

Diese Kraft ist gleich der Kraft auf Leiter 3, da die Kräfte F_{21} und F_{23} wegen der entsprechenden Berechnung von I_3 und F_{13} und F_{31} sowieso gleich groß sind.

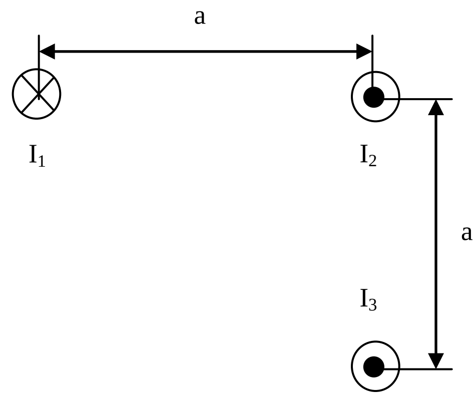
05.01.03 Berechnen Sie für die gegebene Anordnung langer paralleler stromdurchflossener Leiter der Länge l die Kraft auf den Leiter 3.

$I_1 = I_2 = I_3 = 10\ A$

$a = 0{,}1\ m$

$l = 10\ m$

$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H/m$



Lösung:

$\overline{F}_{32} = I_3(\overline{l}_3 \times \overline{B}_{32})$ l_3 in Richtung von I_3

$\overline{B}_{32} = \mu_0 \cdot \overline{H_{32}};$ $H_{32} = \dfrac{I_2}{2\pi\, a}$ wegen des zylindersymmetrischen Feldes

$$F_{32} = \frac{I_3 \cdot I_2 \cdot l_3 \cdot \mu_0}{2\pi\, a}; \qquad F_{31} = \frac{I_3 \cdot I_1 \cdot l_3 \cdot \mu_0}{2\pi \sqrt{2a^2}}$$

$\overline{F}_3 = \overline{F}_{32} + \overline{F}_{31}$ bzw. $F_3 = \sqrt{F_{3x}{}^2 + F_{3y}{}^2}\,;\ \ F_{3x} = F_{31x};\ \ F_{3y} = F_{32} - F_{31y}$

$F_{32} = 2\ 10^{-3}\ N$

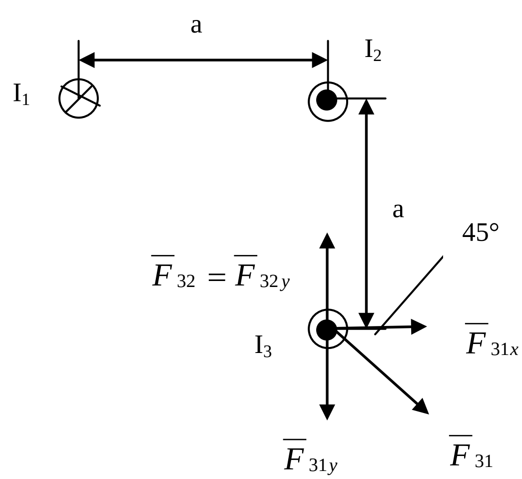
$F_{31} = 1{,}414\ 10^{-3}\ N$

$F_{31x} = F_{31y} = 10^{-3}\ N$

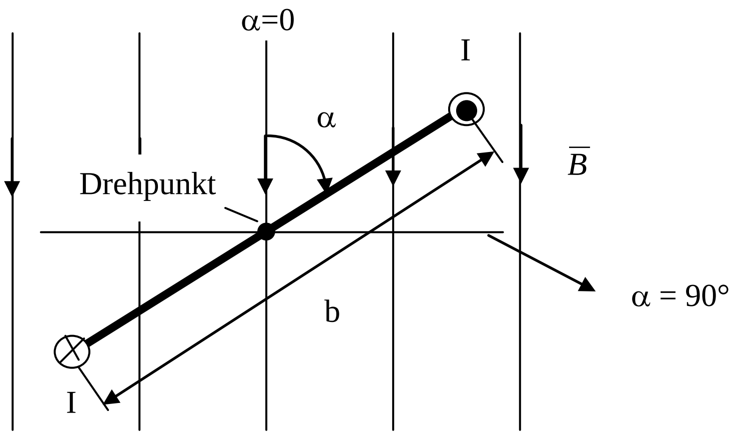
$F_{3x} = 1\ mN$

$F_{3y} = 1\ mN$

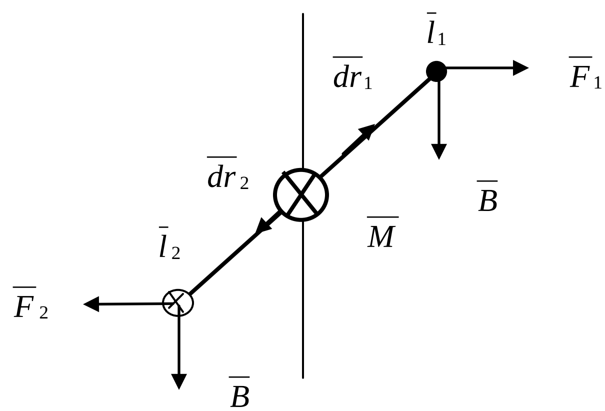
$$\underline{\underline{F_3 = \sqrt{2}\ mN}}$$



05.01.04 Eine vom Strom I durchflossene rechteckige Spule (N Windungen, Tiefe l, Breite b) befindet sich in einem konstanten homogenen Magnetfeld mit der Induktion B. Bestimmen Sie die Größe der zum Winkel α auf die einzelnen Teile der drehbar gelagerten Spule (Drehachse senkrecht auf B) wirkenden Drehmomente und das Gesamtdrehmoment nach Betrag und Richtung.



Lösung:



$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$$

$$\overline{F}_1 = I(\overline{l}_1 \times \overline{B}); \quad \overline{l}_1 \textit{ senkrecht auf } \overline{B}$$

$$\rightarrow F_1 = I \cdot l \cdot B = F_2$$

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2; \quad \overline{M} = 2(\overline{r} \times \overline{F})$$

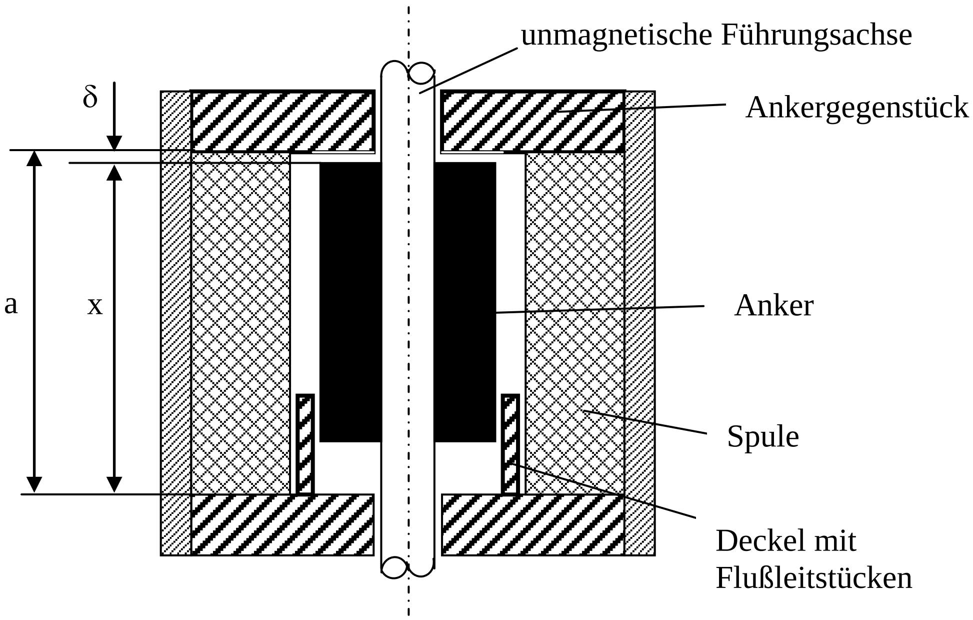
$$M = 2 \cdot r \cdot F \cdot \sin(90° - \alpha) = 2 \cdot r \cdot F \cdot \cos\alpha$$

$$\underline{\underline{M = b \cdot l \cdot I \cdot B \cdot \cos\alpha}}$$

Die Richtung des Drehmomentes gilt bis 90°, dann dreht sich die Richtung um. Um die Drehbewegung fortzusetzen, muss die Stromrichtung umgedreht werden.

05.03.01 Gegeben ist ein Topfmagnet (ohne Kennlinienbeeinflussung) mit den folgenden Abmessungen:
Ankerdurchmesser d_a = 20 mm; Durchmesser der unmagnetischen Führungsachse d_i = 6 mm.

Bei Vernachlässigung des magnetischen Widerstandes des Eisenweges und der Streuung ist bei Θ = 1000 A und Θ = 2000 A für die Luftspaltbreiten δ = 3,6 mm; 1,8 mm; 0,4 mm und 0 die auf den Anker wirkende Kraft zu berechnen.
Diskutieren Sie den Einfluß der gemachten Vernachlässigungen auf das Ergebnis.



Lösung: (2 Seiten)

(i = konstant; für konstantes Θ gegeben)

$dW_{elektrisch} = dW_{magnetisch} + dW_{mechanisch}$

$uidt = d\frac{\Psi \cdot i}{2} + Fdx;\qquad u = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt};$ mit konstantem i entfällt der erste Summand.

$$\frac{dL}{dt} \cdot i^2 dt = \frac{i^2}{2} dL + Fdx \rightarrow Fdx = \frac{i^2}{2} dL$$

$$F = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx};\qquad L = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2}{R_{mFe} + R_{m\delta}(1-\sigma)}$$

Magnetischer Widerstand des Eisens und Streuung im Luftspalt werden vernachlässigt.

a = $\delta + x; \quad dx = -d\delta$ (dx in Richtung der Kraft)

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{dL}{d\delta} = -\frac{d}{d\delta}\frac{w^2}{R_{m\delta}} = -\frac{d}{d\delta}\frac{w^2\mu_0 A_\delta}{\delta}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{w^2\mu_0 A_\delta}{\delta^2}$$

$$F = \frac{i^2}{2}\cdot\frac{w^2\mu_0 A_\delta}{\delta^2} \xrightarrow{\Theta = w\cdot i} \frac{\mu_0 A_\delta}{2}\left(\frac{\Theta}{\delta}\right)^2$$

Zusammenhang zur Maxwellschen Zugkraftformel:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\mu_0 A_\delta}{2}\left(\frac{\Theta}{\delta}\right)^2 = \frac{\mu_0 A_\delta}{2}\left(\frac{\phi\cdot R_{m\delta}}{\delta}\right)^2 = \frac{\mu_0 A_\delta}{2}\left(\frac{B_\delta\cdot A_\delta \frac{\delta}{\mu_0 A_\delta}}{\delta}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{B_\delta{}^2 A_\delta}{2\mu_0}}}$$

$$A_\delta = \pi\left(r_a{}^2 - r_i{}^2\right) = 286\,mm^2; \quad \frac{\mu_0 A_\delta}{2} = 179{,}6\cdot 10^{-9}\,\frac{V\,s\,mm}{A}$$

$$F = 179{,}6\cdot 10^{-9}\,\frac{V\,s\,mm}{A}\cdot\left(\frac{\Theta}{\delta}\right)^2$$

z.B. $\Theta = 1000\,A; \quad \delta = 3{,}6\,mm \rightarrow F = \underline{\underline{13{,}86\ N}}$

$\delta\,/\,mm$	3,6	1,8	0,4	0
F_1/N (Θ_1=1000 A)	13,86	55,44	1122,5	∞
F_2/N (Θ_2=2000 A)	55,44	221,6	4490	∞

Fehler:

Je kleiner der Luftspalt, desto eher ist die Streuung vernachlässigen, aber dann ist der Eisenwiderstand nicht mehr zu vernachlässigen

06.01.01 Gegeben ist eine Wechselspannung u = Û sin ωt mit Û = 537 V und f = 50 Hz. Bestimmen Sie den Effektivwert, den Gleichwert und den Gleichrichtwert dieser Wechselspannung. Wie groß ist der in einem an diese Quelle angeschlossenen Widerstand (R = 2,7 kΩ) umgesetzte Gleichwert der Leistung?

Lösung:

Effektivwert:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\hat{U}^2\int \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\hat{U}^2\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{2}(t-\frac{1}{\omega}\sin 2\omega t \Big|_0^T} \xrightarrow{mit\ \omega=\frac{2\pi}{T}} \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = U = \underline{\underline{379{,}7V}}$$

Gleichwert:

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}\sin\omega t\ dt = 0$$

Gleichrichtwert:

$$\left|\overline{u}\right| = \frac{1}{T}\int_0^T \left|u(t)\right|dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \hat{U}\sin\omega t\, dt = \frac{2\hat{U}}{T\omega}(-\cos\omega t)\ \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{\hat{U}}{\pi}(-\cos\frac{T2\pi}{2T}+\cos 0°) = \frac{2\hat{U}}{\pi} = \underline{\underline{342\ V}}$$

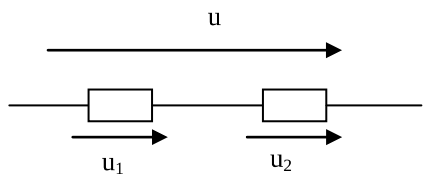
Gleichwert der Leistung:

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{U}^2}{R}\sin^2\omega\, t\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{U}^2}{R}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega\, t\right)dt$$

$$\overline{p} = \frac{\hat{U}^2}{2R} = \frac{U^2}{R} = \frac{379{,}7^2V^2}{2700\frac{V}{A}} = \underline{\underline{53{,}4\,W}}$$

06.01.02 b) Gegeben ist die folgende Schaltung mit

u_1 = 10V sin(ωt + π/6) und u_2 = 15V sin(ωt + π/3).



Ermitteln Sie Maximalwert, Effektivwert und Phasenwinkel der resultierenden Spannung u.

a) durch grafische Addition der beiden Zeitverläufe - im Moment keine Musterlösung)

b) durch analytische Addition der Zeitfunktionen.

c) durch Zeigeraddition

Lösung: b)

$$u = u_1 + u_2 = \hat{U}_{11}\sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{U}_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\xrightarrow{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \hat{U}_1\left[\sin\omega t\cdot\cos\varphi_{u1} + \cos\omega t\cdot\sin\varphi_{u1}\right] + \hat{U}_2\left[\sin\omega t\cdot\cos\varphi_{u2} + \cos\omega t\cdot\sin\varphi_{u2}\right]$$
$$= \hat{U}\left[\sin\omega t\cdot\cos\varphi_u + \cos\omega t\cdot\sin\varphi_u\right]$$

mit Koeffizientenvergleich folgt:

$$\hat{U}\cos\varphi_u = \hat{U}_1\cos\varphi_{u1} + \hat{U}_2\cos\varphi_{u2} = 10V\cos 30° + 15V\cos 60° = 16{,}16V$$

$$\hat{U}\sin\varphi_u = \hat{U}_1\sin\varphi_{u1} + \hat{U}_2\sin\varphi_{u2} = 10V\sin 30° + 15V\sin 60° = 17{,}99V$$

$$\hat{U} = \sqrt{16{,}16^2 + 17{,}99^2} = \underline{\underline{24{,}18V}} \quad ; \qquad \varphi_u = \arctan\frac{17{,}99}{16{,}16} = \underline{\underline{48{,}1°}}$$

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{17{,}1V}}$$

$$\underline{\underline{u = 24{,}18V\sin(\omega t + 48{,}1°)}}$$

06.01.04 a) Ermitteln Sie für die unter a) und b) gegebenen Schaltungen die an den Bauelementen auftretenden Maximalwerte von Spannung und Strom sowie die jeweiligen Nullphasenwinkel.

Berechnen Sie den Gleichwert der Leistung. Bestimmen Sie die Scheinwiderstände und die Phasenwinkel für die Frequenzen f = 0; 50; 100; 5000 Hz und f $\rightarrow \infty$.

Berechnen Sie für die angegebenen Frequenzen alle Teilströme und Teilspannungen. Wie verändert sich die Leistungsaufnahme des jeweiligen Zweipols in Abhängigkeit von der Frequenz?

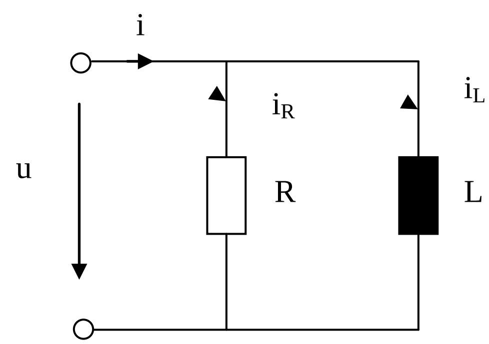
a)

u = 311V sin ωt

R_1 = 500 Ω

L = 1 H

f = 50 Hz



Lösung: (2 Seiten)

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{\hat{U}\sin\omega t}{R} = \frac{311V}{500\Omega}\cdot\sin\omega t = \underline{\underline{0{,}622A\cdot\sin\omega t}}$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int u\,dt = -\frac{1}{\omega L}\cdot\hat{U}\cdot\cos\omega t = \frac{1}{\omega L}\cdot\hat{U}\cdot\sin(\omega t-90°) = \frac{1}{314s^{-1}1\frac{Vs}{A}}\cdot 311V\cdot\sin(\omega t-90°)$$

$$\underline{\underline{i_L = 0{,}99A\sin(\omega t-90°)}}$$

$$i = i_R + i_L$$

$$\hat{I}\cdot\sin(\omega t+\varphi_i) = \hat{I}_R\cdot\sin\omega t - \hat{I}_L\cdot\cos\omega t$$

$$mit \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \quad folgt:$$

$$\hat{I}\cdot(\sin\omega t\cdot\cos\varphi_i + \cos\omega t\cdot\sin\varphi_i) = \hat{I}_R\cdot\sin\omega t - \hat{I}_L\cdot\cos\omega t$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen zur Berechnung von $\hat{I}$ *und* φ_i.

Aufgabe 06.01.04 a)/Seite 2

$$(1) \quad \hat{I} \cdot \cos\varphi_i = \hat{I}_R \; ; \qquad (2) \quad \hat{I} \cdot \sin\varphi_i = -\hat{I}_L$$

$$(2) \div (1) \rightarrow \tan\varphi_i = \frac{-\hat{I}_L}{\hat{I}_R} \rightarrow \varphi_i = -\arctan\frac{\hat{I}_L}{\hat{I}_R} = -\arctan\frac{\frac{\hat{U}}{\omega L}}{\frac{\hat{U}}{R}} = -\arctan\frac{R}{\omega L} = \underline{\underline{-57{,}8°}}$$

$$\sqrt{(1)^2 + (2)^2} \rightarrow \hat{I}^2(\sin^2\varphi_i + \cos^2\varphi_i) = \hat{I}_R{}^2 + \hat{I}_L{}^2 \xrightarrow{\sin^2\varphi_i + \cos^2\varphi_i = 1} \hat{I} = \sqrt{\hat{I}_R{}^2 + \hat{I}_L{}^2} = \underline{\underline{1{,}16\ A}}$$

$$oder\ auch: \hat{I} = \sqrt{(\frac{\hat{U}}{R})^2 + (\frac{\hat{U}}{\omega L})^2} = \hat{U} \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}$$

Der Gleichwert der Leistung kann auf folgendem Weg berechnet werden:

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot i(t)dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot [i_R(t) + i_L(t)]dt$$

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{U}\sin\omega t \cdot \left[\hat{I}_R \sin\omega t - \hat{I}_L \cos\omega t\right]dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\hat{U} \cdot \hat{I}_R \cdot \sin^2\omega t - \hat{U} \cdot \hat{I}_L \cdot \sin\omega t \cdot \cos\omega t\right]dt$$

$$mit \quad \sin^2\omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t \quad und \quad \sin\omega t \cdot \cos\omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t \quad folgt:$$

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}_R}{2}dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}_R}{2} \cdot \cos 2\omega t \cdot dt - \frac{1}{T}\int \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}_L}{2} \cdot \sin 2\omega t \cdot dt = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}_R}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}_R}{\sqrt{2}} = U \cdot I_R$$

$$\overline{p} = \underline{\underline{96\ W}} = P\ (Wirkleistung)$$

$$\text{Scheinwiderstand}: \quad Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}} \quad : \omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z \rightarrow 0; \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow Z \rightarrow R$$

$$\text{Phasenwinkel:} \quad \varphi = -\arctan\frac{R}{\omega L} \quad : \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}; \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$$

f/Hz	0	50	100	5000	∞
Z/Ω	0	265,9	391,2	499,9	500
φ/°	-90	-57,9	-38,5	-0,91	0

06.01.04b) Ermitteln Sie für die unter a) und b) gegebenen Schaltungen die an den Bauelementen auftretenden Maximalwerte von Spannung und Strom sowie die jeweiligen Nullphasenwinkel.

Berechnen Sie den Gleichwert der Leistung. Bestimmen Sie die Scheinwiderstände und die Phasenwinkel für die Frequenzen f = 0; 50; 100; 5000 und f → ∞.
Berechnen Sie für die angegebenen Frequenzen alle Teilströme und Teilspannungen. Wie verändert sich die Leistungsaufnahme des jeweiligen Zweipols in Abhängigkeit von der Frequenz?

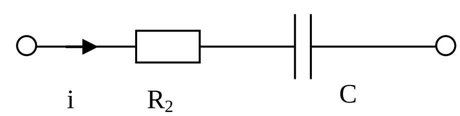
b)

i = 1,414A sin ωt

R_2 = 120 Ω

C = 30 µF

f = 50 Hz



Lösung: (2 Seiten)

$$u_R = i_R \cdot R_2 = \hat{I}R_2 \sin\omega t = 1{,}414A \cdot 120\Omega \sin\omega t = \underline{\underline{169{,}7V \cdot \sin\omega t}}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = -\frac{1}{\omega C}\cdot\hat{I}\cdot\cos\omega t = \frac{1}{\omega C}\cdot\hat{I}\cdot\sin(\omega t - 90°) = \frac{1}{314s^{-1}30\cdot10^{-6}\frac{As}{V}}\cdot 1{,}414A\cdot\sin(\omega t - 90°)$$

$$\underline{\underline{u_C = 150{,}1V\sin(\omega t - 90°)}}$$

$$u = u_R + u_C$$

$$\hat{U}\cdot\sin(\omega t + \varphi_i) = \hat{U}_R\cdot\sin\omega t - \hat{U}_C\cdot\cos\omega t$$

$$mit \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \quad folgt:$$

$$\hat{U}\cdot(\sin\omega t\cdot\cos\varphi_i + \cos\omega t\cdot\sin\varphi_i) = \hat{U}_R\cdot\sin\omega t - \hat{U}_C\cdot\cos\omega t$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen zur Berechnung von $\hat{U}$ *und* φ_u .

Aufgabe 06.01.04b) /Seite 2

$$(1)\quad \hat{U}\cdot\cos\varphi_u = \hat{U}_R\,; \qquad (2)\quad \hat{U}\cdot\sin\varphi_u = -\hat{U}_C$$

$$(2)\div(1)\rightarrow \tan\varphi_i = \frac{-\hat{U}_C}{\hat{U}_R}\rightarrow\varphi_u = -\arctan\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}_R} = -\arctan\frac{\frac{\hat{I}}{\omega C}}{\hat{I}\cdot R_2} = -\arctan\frac{1}{\omega C R_2} = \underline{\underline{-41^\circ}}$$

$$\sqrt{(1)^2+(2)^2}\rightarrow\hat{U}^2(\sin^2\varphi_i+\cos^2\varphi_i) = \hat{U}_R{}^2+\hat{U}_C{}^2 \xrightarrow{\sin^2\varphi_i+\cos^2\varphi_i=1}\hat{U} = \sqrt{\hat{U}_R{}^2+\hat{U}_C{}^2} = \underline{\underline{226{,}6V}}$$

$$oder\ auch: \hat{U} = \sqrt{(\hat{I}\cdot R_2)^2+(\frac{\hat{I}}{\omega C})^2} = \hat{I}\cdot\sqrt{R_2{}^2+\frac{1}{(\omega C)^2}} = \hat{I}\cdot Z$$

Der Gleichwert der Leistung kann auf folgendem Weg berechnet werden:

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u(t)\cdot i(t)dt = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T i(t)\cdot[u_R(t)+u_C(t)]dt$$

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \hat{I}\sin\omega t\cdot[\hat{U}_R\sin\omega t-\hat{U}_C\cos\omega t]dt = \frac{1}{T}\int_0^T[\hat{U}_R\cdot\hat{I}\cdot\sin^2\omega t-\hat{U}_C\cdot\hat{I}\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega t]dt$$

$$mit\quad \sin^2\omega t = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega t\quad und\quad \sin\omega t\cdot\cos\omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t\quad folgt:$$

$$\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{\hat{U}_R\cdot\hat{I}}{2}dt-\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\hat{U}_R\cdot\hat{I}}{2}\cdot\cos 2\omega t\cdot dt-\frac{1}{T}\int\frac{\hat{U}_C\cdot\hat{I}}{2}\cdot\sin 2\omega t\cdot dt = \frac{\hat{U}_R\cdot\hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}_R}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_R\cdot I$$

$$\overline{p} = \underline{\underline{120W}} = P\ (Wirkleistung)$$

Scheinwiderstand : $Z = \sqrt{R_2{}^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}\quad :\omega\rightarrow 0\Rightarrow Z\rightarrow\infty;\quad \omega\rightarrow\infty\Rightarrow Z\rightarrow R_2$

Phasenwinkel: $\varphi = -\arctan\frac{1}{\omega R_2 C}\quad :\omega\rightarrow 0\Rightarrow\varphi\rightarrow -\frac{\pi}{2};\quad \omega\rightarrow\infty\Rightarrow\varphi\rightarrow 0$

f/Hz	0	50	100	5000	∞
Z/Ω	∞	160,2	131,2	120	120
φ/°	-90	-41,5	-23,9	-0,51°	0

06.02.02 Berechnen Sie alle Ströme und Spannungen in den gegebenen Schaltungen mit Hilfe der symbolischen Methode.

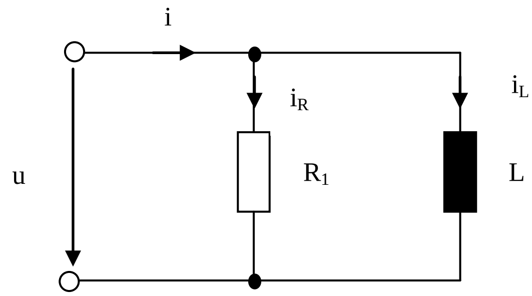
a)

$i_L = 1\ A \sin(\omega t + \pi/3)$

$R_1 = 250\Omega$

$L = 0{,}5\ H$

$f = 50\ Hz$



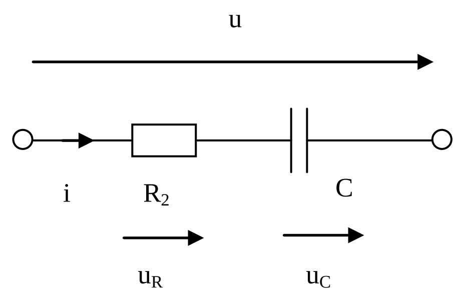
b)

$i = 1\ A \sin(\omega t - \pi/6)$

$R_1 = 200\ \Omega$

$C = 50\ \mu F$

$f = 50\ Hz$



Lösung:

a) 1. Transformation ins Komplexe:

$$\underline{\hat{I}}_L = \hat{I}_L \cdot e^{j\varphi_{LL}} = 1A \cdot e^{j60°}; \quad \omega L = 314 s^{-1} 0{,}5 \frac{Vs}{A} = \underline{\underline{157\Omega}}$$

2. Rechnung im Komplexen:

$$\underline{\hat{U}}_L = \underline{\hat{U}}_R = j\omega L \cdot \underline{\hat{I}}_L = 157 \frac{V}{A} 1 A e^{j(60°+90°)} = \underline{\underline{157 V e^{j150°}}}$$

$$\underline{\hat{I}}_R = \frac{\underline{\hat{U}}_L}{R} = \frac{157 V e^{j150°}}{250\Omega} = \underline{\underline{0{,}628 A e^{j150°}}}$$

$$\underline{\hat{I}} = \underline{\hat{I}}_R + \underline{\hat{I}}_L = 1{,}18 A e^{j92{,}1°}$$

3. Rücktransformation in den Zeitbereich:

$u_L = 157V \cdot \sin(\omega t + 150°); \quad i_R = 0{,}628A \cdot \sin(\omega t + 150°)$

$i = 1{,}18A \cdot \sin(\omega t + 92{,}1°)$

b) 1. Transformation ins Komplexe:

$$\underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} = 1A \cdot e^{-j30°}; \quad \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{314s^{-1} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\frac{As}{V}} = -j\,63{,}7\,\Omega$$

2. Rechnung im Komplexen:

$$\underline{\hat{U}}_R = R \cdot \underline{\hat{I}} = \underline{\underline{200\,V \cdot e^{-j30°}}}; \quad \underline{\hat{U}}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{\hat{I}} = \underline{\underline{-\,j63{,}7\,V \cdot e^{-j120°}}}$$

$$\underline{\hat{U}} = \underline{\hat{U}}_R + \underline{\hat{U}}_C = 200\,V \cdot e^{-j30°} + 63{,}7V \cdot e^{-j120°} = 200V \cdot (0{,}866 - j0{,}5) + 63{,}7V \cdot (-0{,}5 - j0{,}886)$$

$$\hat{U} = (141{,}35 - j155{,}16)V = \underline{\underline{209{,}9\,V \cdot e^{-j47{,}7°}}}$$

3. Rücktransformation in den Zeitbereich:

$u_R = 200V \cdot \sin(\omega t - 30°); \quad u_C = 63{,}7V \cdot \sin(\omega t - 120°)$

$u = 209{,}9V \cdot \sin(\omega t - 47{,}7°)$

06.02.04 Berechnen Sie die Zweigströme der gegebenen Schaltung mit Hilfe der symbolischen Methode und der Knotenspannungsanalyse.

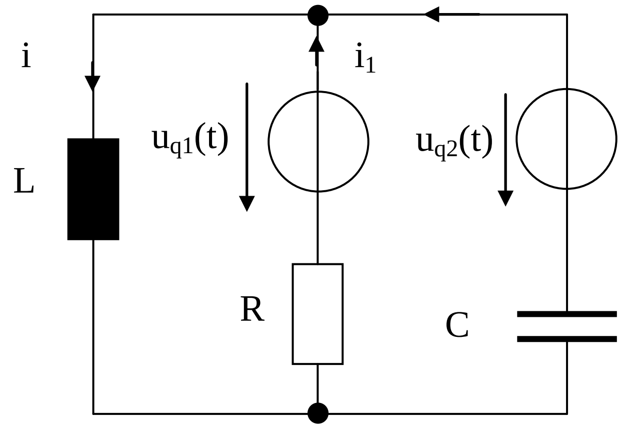
$u_{q1} = u_{q2} = 311\text{V} \sin \omega t$

R = 50 Ω

L = 1,5 H

C = 60 μF

$\omega = 314\ s^{-1}$



Lösung:

$$\frac{\underline{\hat{U}}_{q1}}{R} + \frac{\underline{\hat{U}}_{q2}}{\frac{-j}{\omega C}} = \underline{\hat{U}}_{10}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{-j}{\omega C}}\right); \quad \omega L = 471\,\Omega; \quad \frac{1}{\omega C} = 53{,}1\,\Omega$$

$$\underline{\hat{U}}_{10} = \frac{\frac{311}{50} + \frac{311}{-j53{,}1}}{\frac{1}{50} + \frac{1}{j471} + \frac{1}{-j53{,}1}} V = \frac{6{,}22 + j5{,}86}{0{,}02 + j0{,}016} = \underline{\underline{328{,}85\,V \cdot e^{j3{,}44°}}}$$

$$u_{10} = u_L = 328{,}8V \cdot \sin(\omega t + 3{,}44°)$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}_L}{j\omega L} = \frac{328{,}85 e^{j3{,}44}}{471 e^{j90°}} = \underline{\underline{0{,}7A \cdot e^{-j86{,}6°}}}; \quad \underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}_{q1} - \underline{\hat{U}}_L}{R} = \frac{311 - 328{,}85 e^{j3{,}44°}}{50} = \underline{\underline{0{,}53A \cdot e^{-j131{,}2°}}}$$

$$\underline{\hat{I}}_2 = \frac{\underline{\hat{U}}_{q2} - \underline{\hat{U}}_L}{\frac{-j}{\omega C}} = \frac{311 - 328{,}85 e^{j3{,}44°}}{-j53{,}1} = \underline{\underline{0{,}49A \cdot e^{-j41{,}2°}}}$$

Rücktransformatiom wie bei der Spannung.

06.02.04 Berechnen Sie die Zweigströme der gegebenen Schaltung mit Hilfe der symbolischen Methode und der Knotenspannungsanalyse.

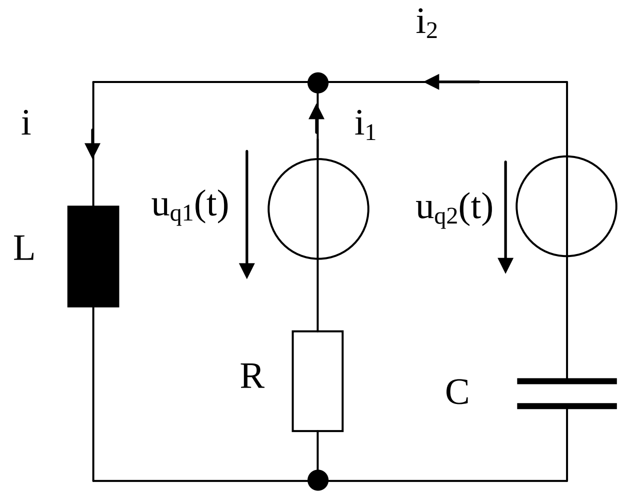
$u_{q1} = u_{q2} = 325\text{V} \sin \omega t$

$R = 50\ \Omega$

$L = 1{,}5\ \text{H}$

$C = 60\ \mu\text{F}$

$\omega = 314\ \text{s}^{-1}$



Lösung:

$$\frac{\underline{\hat{U}}_{q1}}{R} + \frac{\underline{\hat{U}}_{q2}}{\frac{-j}{\omega C}} = \underline{\hat{U}}_{10}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{-j}{\omega C}}\right); \quad \omega L = 471\,\Omega; \quad \frac{1}{\omega C} = 53{,}1\,\Omega$$

$$\underline{\hat{U}}_{10} = \frac{\frac{325}{50} + \frac{325}{-j53{,}1}}{\frac{1}{50} + \frac{1}{j471} + \frac{1}{-j53{,}1}} V = \frac{6{,}5 + j6{,}12}{0{,}02 + j0{,}016} = \underline{\underline{348{,}8\,V \cdot e^{j4{,}62°}}}$$

$$u_{10} = u_L = 348{,}8V \cdot \sin(\omega t + 4{,}62°)$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}_L}{j\omega L} = \frac{348{,}8Ve^{j4{,}62}}{471e^{j90°}} = \underline{\underline{0{,}74A \cdot e^{-j86{,}6°}}}; \quad \underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}_{q1} - \underline{\hat{U}}_L}{R} = \frac{325V - 348{,}8Ve^{j3{,}44°}}{50\Omega} = \underline{\underline{0{,}72A \cdot e^{-j129°}}}$$

$$\underline{\hat{I}}_2 = \frac{\underline{\hat{U}}_{q2} - \underline{\hat{U}}_L}{\frac{-j}{\omega C}} = \frac{325V - 348{,}8Ve^{j4{,}62°}}{-j53{,}1} = \underline{\underline{0{,}68A \cdot e^{-j38{,}9°}}}$$

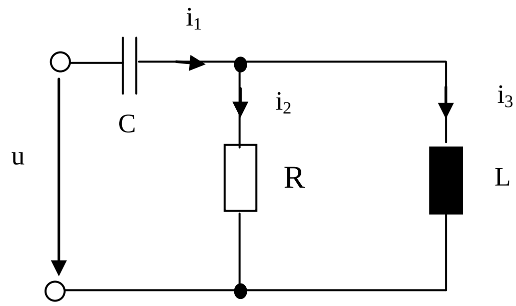
Rücktransformatiom wie bei der Spannung.

06.02.07 Bestimmen Sie mit Hilfe der symbolischen Methode die Ströme i_1, i_2 und i_3 für eine anliegende Spannung u = 325 V sin ωt (f = 50 Hz).

R = 100 Ω

L = 1 H

C = 30 µF



Lösung:

1. Transformation ins Komplexe:

$$\underline{\hat{U} = 325V\cdot e^{jo^\circ}} = 325V;\quad j\omega L = j314\,s^{-1}\cdot 1\frac{Vs}{A} = j314\,\Omega;\quad -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{314\,s^{-1}.30\cdot 10^{-6}\,\frac{As}{V}} = -j106{,}2\,\Omega$$

2. Rechnung im Komplexen:

$$\underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}};\quad \underline{Z} = -j\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}} = -j106{,}2 + \frac{1}{0{,}01 - j0{,}0032} = -j106{,}2 + \frac{10^3}{\sqrt{10^2 + 3{,}2^2}\cdot e^{-jarctac\frac{3{,}2}{10}}}$$

$$\underline{Z} = -j106{,}2 + 95{,}24\cdot e^{j17{,}7^\circ} = -j106{,}2 + 90{,}7 + j28{,}96 = 90{,}7 - j77{,}24 = 119{,}13\cdot e^{-j40{,}4^\circ}$$

$$\underline{\hat{I}}_1 = \frac{325V}{119{,}13\Omega\cdot e^{-j40{,}4^\circ}} = \underline{\underline{2{,}73A\cdot e^{j40{,}4^\circ}}};$$

$$\frac{\underline{\hat{I}}_3}{\underline{\hat{I}}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{100}{100 + j314} = \frac{100}{329{,}5\cdot e^{j72{,}3^\circ}} = 0{,}3\cdot e^{-j72{,}3^\circ} \rightarrow \underline{\hat{I}}_3 = \underline{\underline{0{,}82A\cdot e^{-j31{,}9^\circ}}}$$

$$\frac{\underline{\hat{I}}_2}{\underline{\hat{I}}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{314\cdot e^{j90^\circ}}{100 + j314} = \frac{314\cdot e^{j90^\circ}}{329{,}5\cdot e^{j72{,}3^\circ}} = 0{,}95\cdot e^{j17{,}7^\circ} \rightarrow \underline{\hat{I}}_2 = \underline{\underline{2{,}59\cdot e^{j58{,}1^\circ}}}$$

3. Rücktransformation

$$i_1 = 2{,}731A\cdot\sin(\omega t + 40{,}4^\circ);\quad i_2 = 2{,}59A\cdot\sin(\omega t + 58{,}1^\circ);\quad i_3 = 0{,}82A\cdot\sin(\omega t - 31{,}9^\circ)$$

06.02.08 + Leistungsbilanz Berechnen Sie die Spannung u_L mit Hilfe von symbolischer Methode und Spannungsteilerregel und daraus den Strom i.

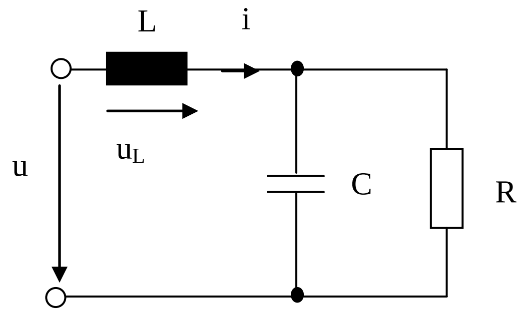
u = 24 V sin (ωt +φ)

$\omega = 3000\ s^{-1}$; φ = 30°

R = 30 Ω

L = 15 mH

C = 10 μF



Lösung:

$$\omega L = 45\ \Omega; \quad \frac{1}{\omega C} = 33{,}3\ \Omega$$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{33.3mS + j30mS} = \frac{1}{\sqrt{33{,}3^2 + 30^2}\, e^{j \arctan\frac{30}{33{,}3}}} = \underline{\underline{22{,}3\Omega \cdot e^{-j42°}}}$$

$$\frac{\underline{\hat{U}}_L}{\underline{\hat{U}}} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_p} = \frac{45 \cdot e^{j90°}}{j45 + 16{,}47 - j14{,}9} = \frac{45 \cdot e^{j90°}}{\sqrt{16{,}47^2 + 30{,}1^2}\, e^{j \arctan\frac{30{,}1}{16{,}47}}} = \frac{45 \cdot e^{j90°}}{34{,}3 \cdot e^{j61{,}3°}} = \underline{\underline{1{,}31 \cdot e^{j28{,}7°}}}$$

$$\underline{\hat{U}}_L = \underline{\underline{31{,}44V \cdot e^{j58{,}7°}}}; \quad \underline{\underline{u_L = 31{,}44V \cdot \sin(\omega t + 58{,}7°)}}$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}_L}{j\omega L} = \frac{31{,}44 \cdot e^{j58{,}7°}}{45 \cdot e^{j90°}} = \underline{\underline{0{,}7A \cdot e^{-j31{,}3°}}}; \quad \underline{\underline{i = 0{,}7A \cdot \sin(\omega t - 31{,}3°)}}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{U_R^{\ 2}}{R} + j\omega L \cdot I^2 - j\frac{U_R^{\ 2}}{\frac{1}{\omega C}}; \qquad \underline{\hat{U}}_R = \underline{\hat{I}} \cdot \underline{Z}_p = 0{,}7 \cdot e^{-j31{,}3} \cdot 22{,}3 \cdot e^{-j42} = 15{,}61V \cdot e^{-j73{,}3°}$$

$$\frac{24 \cdot e^{j30°} \cdot 0{,}7 \cdot e^{j31{,}3°}}{2} = \frac{15{,}61^2}{2 \cdot 30} + j(\frac{0{,}7^2}{2}45 - \frac{15{,}61^2}{2 \cdot 33{,}3})$$

$$8{,}4 \cdot e^{j61{,}3°} = 4{,}03W + 7{,}37\,\text{var} \approx 4{,}06W + j(11{,}025 - 3{,}66)\,\text{var} = 4{,}06W + j7{,}37\,\text{var}$$

06.02.09 Berechnen Sie für die gegebene Schaltung unter Verwendung der symbolischen Methode

a) u_L mit Hilfe der Zweipoltheorie

b) i_1 mit Hilfe der Knotenspannungsanalyse (Kontrolle über u_L)

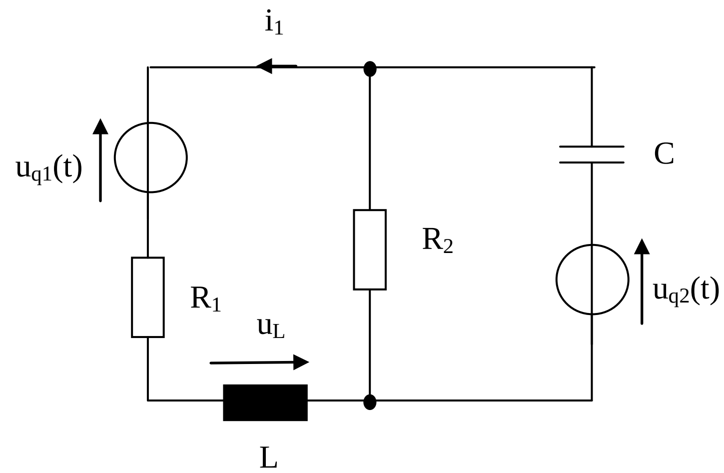
$u_{q1} = 325V \sin \omega t$

$u_{q2} = 325V \sin(\omega t + 30°)$

f = 50 Hz; L = 0,1 H

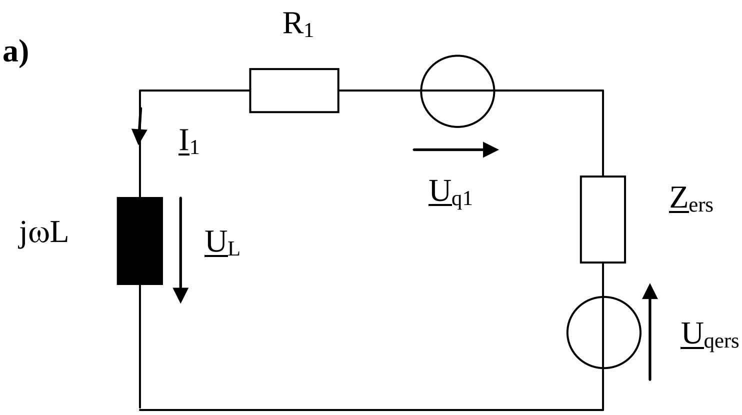
C = 63 µF; $R_1 = 30\ \Omega$

$R_2 = 45\ \Omega$



Lösung:

a)



$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_1;$

$\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_{q1} - \underline{U}_{qers}}{R_1 + j\omega L + \underline{Z}_{ers}}$

$$\underline{Z}_{ers} = \frac{R_2 \cdot (-j\frac{1}{\omega C})}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{45(-j50,5)}{45 - j50,5} = 33,6\,\Omega \cdot e^{-j41,7°} \qquad \underline{U}_{qers} = \frac{\underline{U}_{q2} R_2}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{230Ve^{j30°}\,45}{45 - j50,5} = 153Ve^{j78,3°}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{230 - 153e^{j78,3°}}{30 + j31,4 + 33,6e^{-j41,7°}} = \frac{249e^{-j37°}}{55,83e^{j9,33°}} = \underline{\underline{4,46Ae^{-j46,3°}}}; \underline{\underline{\hat{\underline{I}}_1 = 6,31Ae^{-j46,3°}}}$$

$$\underline{\underline{\hat{\underline{U}}_L = 198,2Ve^{j43,7°°}}}; \quad u_L = 198,2V \sin(\omega t + 43,7°)$$

Aufgabe 06.02.09/Seite 2

b)

$$-\frac{\underline{\hat{U}}_{q1}}{R_1 + j\omega L} - \frac{\underline{\hat{U}}_{q2}}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = \underline{\hat{U}}_{10}\left(\frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{-j\dfrac{1}{\omega C}}\right)$$

$$-\frac{325}{30 + j31{,}4} - \frac{325e^{j30°}}{-j50{,}5} = \underline{\hat{U}}_{10}\left(\frac{1}{43{,}4e^{j46{,}3°}} + \frac{1}{45} + \frac{1}{-j50{,}5}\right)$$

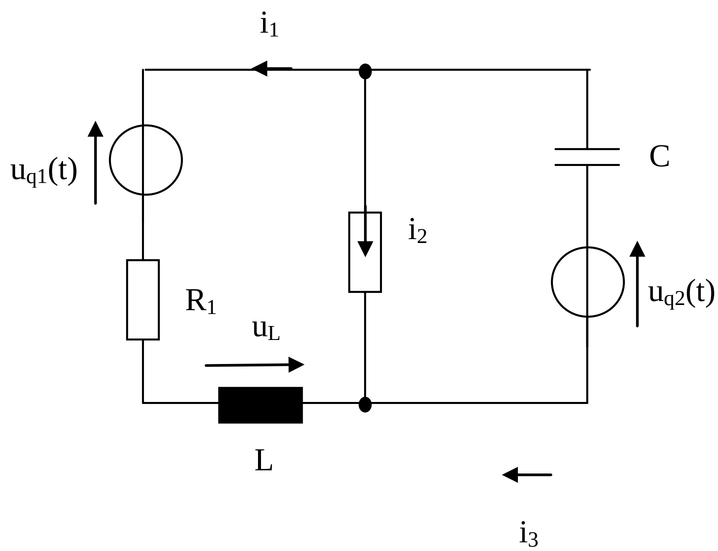
$$\underline{\hat{U}}_{10} = \frac{-7{,}48e^{-j46{,}3°} - 6{,}44e^{j120}}{23{,}04e^{-j46{,}3°} + 22{,}2 + j19{,}8} \cdot 10^3 = \underline{\underline{51{,}1Ve^{-j179{,}7°}}}$$

$$\underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}_{q1} + \underline{\hat{U}}_{10}}{R_1 + j\omega L} = \frac{325 + 51{,}1e^{-j179{,}7°}}{30 + j31{,}4} = \underline{\underline{6{,}3Ae^{-j46{,}4°}}}$$

$$i_1 = 6{,}3A\sin(\omega t - 46{,}4°)$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\hat{I}}_2 = \dfrac{\underline{\hat{U}}_{10}}{R_2} = \dfrac{51{,}1V \cdot e^{-j179{,}7}}{45\Omega} = \underline{\underline{1{,}14A \cdot e^{-j179{,}7°}}}; \\[2ex] \underline{\hat{I}}_3 = \dfrac{\underline{\hat{U}}_{q2} + \underline{\hat{U}}_{10}}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = \dfrac{325V \cdot e^{j30°} + 51{,}1V \cdot e^{-j179{,}7°}}{-j50{,}55\Omega} = \underline{\underline{5{,}57A \cdot e^{j125{,}15°}}} \end{array}\right]$$

06.02.09 Leistungsbilanz:



$u_{q1} = 325V \sin \omega t$

$u_{q2} = 325V \sin(\omega t + 30°)$

f = 50 Hz; L = 0,1 H

C = 63 μF; R_1 = 30 Ω

R_2 = 45 Ω

Lösung:

$$\left[\underline{\hat{U}}_{10} = \frac{-7{,}48e^{-j46{,}3°} - 6{,}44e^{j120}}{23{,}04e^{-j46{,}3°} + 22{,}2 + j19{,}8} \cdot 10^3 = \underline{\underline{51{,}1Ve^{-j179{,}7°}}}\right]$$

$$\left[\underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}_{q1} + \underline{\hat{U}}_{10}}{R_1 + j\omega L} = \frac{325 + 51{,}1e^{-j179{,}7°}}{30 + j31{,}4} = \underline{\underline{6{,}3Ae^{-j46{,}4°}}}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\hat{I}}_2 = \dfrac{\underline{\hat{U}}_{10}}{R_2} = \dfrac{51{,}1V \cdot e^{-j179{,}7}}{45\Omega} = \underline{\underline{1{,}14A \cdot e^{-j179{,}7°}}}; \\[2em] \underline{\hat{I}}_3 = \dfrac{\underline{\hat{U}}_{q2} + \underline{\hat{U}}_{10}}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = \dfrac{325V \cdot e^{j30°} + 51{,}1V \cdot e^{-j179{,}7°}}{-j50{,}55\Omega} = \underline{\underline{5{,}57A \cdot e^{j125{,}15°}}} \end{array}\right]$$

Leistung

quellenseitig:

$$\underline{S} = \frac{\underline{\hat{U}}_{q1} \cdot \underline{\hat{I}}_1^*}{2} + \frac{\underline{\hat{U}}_{q2} \cdot \underline{\hat{I}}_3^*}{2} = 1023{,}75VAe^{j46{,}4°} + 905{,}125VAe^{-j95{,}15} = 644{,}94VAe^{-j14{,}37°} = 624{,}75W - j160{,}1\,\mathrm{var}$$

verbraucherseitig:

$$I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + j(I_1^2 \cdot \omega L - I_3^2 \cdot \frac{1}{\omega C}) = 624{,}6W - j160{,}3\,\mathrm{var}$$

Differenz durch Rundung, z. B. bei π

06.02.12 Gegeben ist die folgende Schaltung:

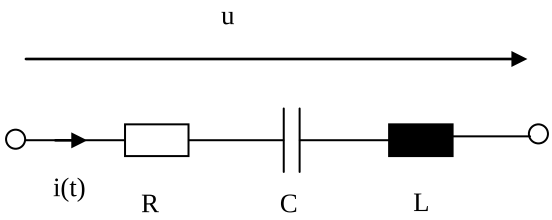
$u = 24\text{ V} \sin(\omega t + 15°)$

$R = 100\ \Omega$

$L = 1{,}2\text{ H}$

$C = 10\ \mu\text{F}$

$f = 50\text{ Hz}$



Berechnen Sie den Strom i(t) mit Hilfe der symbolischen Methode.

Lösung:

(Die eigentliche Berechnung beginnt bei "<u>1. Transformation ins Komplexe</u>" ; Seite 2).

Wenn Aufgabe zur Einführung der symbolischen Methode verwendet wird, könnte der folgende Weg eingeschlagen werden:

$$u = R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt; \quad Ansatz: i = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i); \quad u = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u) = R \cdot \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i) + \omega L \cdot \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_i) - \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u) = R \cdot \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i) + \omega L \cdot \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i + 90°) + \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i - 90°)$$

Wird jetzt der Sinus als Imaginärteil einer komplexen Zahl eingeführt und der Realteil hinzugefügt, entsteht die folgende Gleichung:

$$\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} + \omega L \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j90°} + \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j90°}$$

Da der Term $e^{j\omega t}$ in allen Summanden enthalten ist und nicht Null wird, kann er herausgekürzt werden. Mit Einführung der komplexen Amplituden und der komplexen Widerstände:

$$\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} = \underline{\hat{U}}; \quad \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} = \underline{\hat{I}}; \quad \omega L \cdot e^{j90°} = j\omega L; \quad \frac{1}{\omega C} e^{-j90°} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

erhält man die folgende komplexe, aber algebraische Gleichung, die zur Berechnung der gesuchten Größen benutzt werden kann: $\underline{\hat{U}} = R \cdot \underline{\hat{I}} + j\omega L \cdot \underline{\hat{I}} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{\hat{I}}$

Diese Betrachtungen führen zum folgenden abgekürten Weg:

<u>1. Transformation ins Komplexe</u>:

$$\underline{\hat{U}} = 24V \cdot e^{j15°}; \quad j\omega L = j314\,s^{-1} \cdot 1{,}2\frac{Vs}{A} = j376{,}8\Omega; \quad -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{314\,s^{-1}.10 \cdot 10^{-6}\,\frac{As}{V}} = -j318{,}5\ \Omega$$

<u>2. Rechnung im Komplexen</u>:

$$\underline{\hat{I}_1} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}}; \quad \underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 100\Omega + j376{,}8\Omega - j318{,}5\Omega = (100 + j58{,}3)\Omega = 115{,}8\Omega \cdot e^{30{,}3°}$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{24V \cdot e^{j15°}}{115{,}8\Omega \cdot e^{j30{,}3°}} = \underline{\underline{0{,}2A \cdot e^{-j15{,}3°}}};$$

<u>3. Rücktransformation</u>

$$i_1 = 0{,}2A \cdot \sin(\omega t - 15{,}3°)$$

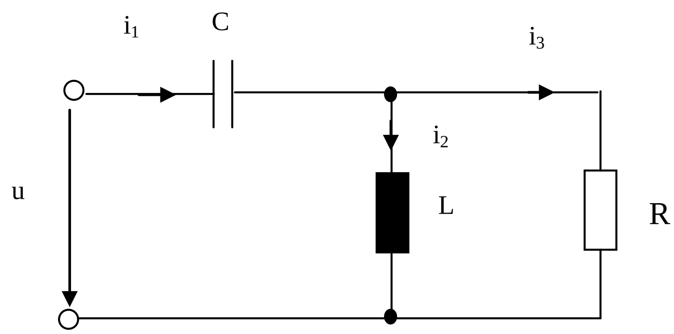
06.03.02 Bestimmen Sie mit Hilfe der komplexen Rechnung die Ströme i_1, i_2 und i_3. Ermitteln Sie Wirk-, Blind- und Scheinleistung. Stellen Sie die Leistungsbilanz auf.

u = 325 V sin ωt

f = 50 Hz

R = 100 Ω

L = 1 H; C = 30 µF



Lösung:

$$\underline{\hat{I}}_1 = \frac{\underline{\hat{U}}}{-j\dfrac{1}{\omega C} + \dfrac{j\omega LR}{R + j\omega L}} = \frac{\underline{\hat{U}}(R + j\omega L)}{-j\dfrac{1}{\omega C}\cdot(R + j\omega L) + j\omega LR} = \frac{325(100 + j314{,}2)}{-j106{,}1(100 + j314{,}2) + j100 \cdot 314{,}2} A$$

$$= \frac{325 + j1021{,}2}{333{,}4 + j208{,}1} A = \frac{1071{,}6 \cdot e^{j72{,}3°}}{393 \cdot e^{j32°}} A = \underline{\underline{2{,}73 A \cdot e^{j40{,}3°}}}$$

$$\underline{\hat{I}}_2 = \frac{\underline{\hat{I}}_1 \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \underline{\underline{2{,}60 A \cdot e^{j58°}}}; \quad \underline{\hat{I}}_3 = \frac{\underline{\hat{I}}_1 \cdot R}{R + j\omega L} = \underline{\underline{0{,}83 A \cdot e^{-j32°}}}$$

$$P = \frac{\hat{I}_2^{\,2}}{2} R = \underline{\underline{338 W}}; \quad Q = -\frac{\hat{I}_1^{\,2}}{2} \cdot \frac{1}{\omega C} + \frac{\hat{I}_3^{\,2}}{2} \cdot \omega L = (-367{,}3 + 99{,}98)\,\text{var} = \underline{\underline{-287{,}5\,\text{var}}}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \underline{\underline{443{,}7 VA}}$$

Leistungsbilanz:

Vergleich der eingegebenen Leistung mit der an den Bauelementen berechneten:

$$\underline{U} \cdot \underline{I}_1^{\,*} = \frac{325 \cdot 2{,}73}{2} e^{j(0-40{,}3°)°} = \underline{\underline{443{,}6 VA \cdot e^{-j40{,}3}}} \approx 443{,}7 VA \cdot e^{-j40{,}3}$$

06.03.07 Gegeben ist ein Zweipol, der vom Strom i = 10A sin(ωt+15°) durchflossen wird und an dem eine Spannung u = 325V sin(ωt+45°) anliegt ($\omega = 314\ s^{-1}$). Berechnen Sie die Ersatzelemente für die Reihenschaltung und die äquivalente Parallelschaltung (Index r für die Reihenschaltung und Index p für die Parallelschaltung). Zeigen Sie, dass Wirk-, Blind- und Scheinleistung für beide Schaltungen gleich bleiben.

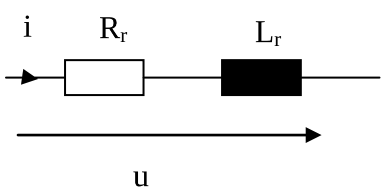
Lösung:

S = UI = $\frac{325V \cdot 10A}{2} = 1625\,VA$; P = S cos φ = 1625 VA cos(45°-15°) = 1407,3 W

Q = S sin φ = 812,5 var

Phasenwinkel φ > 0, daß bedeutet induktiv-ohmsches Verhalten. Es wäre eine Parallel- oder eine Reihenschaltung von R und L möglich.

Reihenschaltung:



$P = RI^2$ (*)→ $R = P/I^2 = 1407{,}3 : 7{,}071^2\ A^2 = 28{,}15\ \Omega$

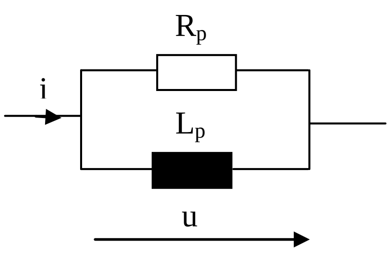
$Q = \omega LI^2$ (*)→ $L = Q/\omega I^2 = 812{,}5\ var : (314\ s^{-1} 7{,}071^2\ A^2)$

L = 51,8 mH

Oder : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{325V \cdot e^{j45°}}{10A \cdot e^{j15°}} = 32{,}5 \cdot e^{j30°} = 28{,}15\Omega + j16{,}25\Omega$ und damit R = 28,15 Ω

und $L = \frac{16{,}25\Omega}{314 s^{-1}} = 51{,}8 mH$. Mit den Gleichungen (*) die Leistung berechnen.

Parallelschaltung:



$P = U^2/R$ (**) → $R = U^2/P = 325^2 V^2/(2*1407{,}3VA) = 37{,}5\ \Omega$

$Q = U^2/\omega L$ (**) → $L = U^2/\omega Q = 325^2 V^2 /(2*314 s^{-1}*812{,}5VA)$

L = 207 mH

Oder: $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{10A \cdot e^{j15°}}{325V \cdot e^{j45°}} = 30{,}77 mS \cdot e^{-j30°} = 26{,}65 mS - j15{,}385 mS$ und damit

$R_p = \frac{1}{26{,}65 mS} = 37{,}5\Omega$ und $L_p = \frac{1V}{314 s^{-1} \cdot 15{,}385 mA} = 207 mH$; mit Gleichungen(**)

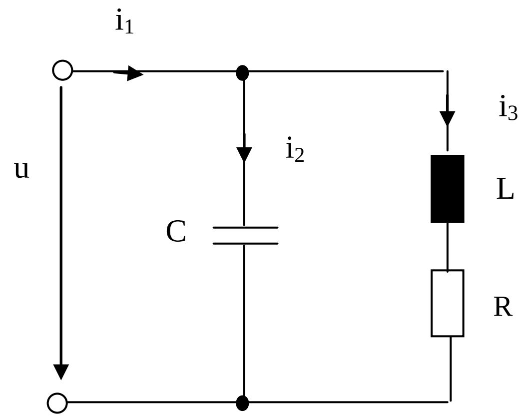
Leistung berechnen.

06.03.08 Berechnen Sie die Zweigströme und stellen Sie die Leistungsbilanz auf.

$u = 21V \sin(\omega t+60°)$

$R = 20\ \Omega$; $L = 5$ mH

$C = 2\ \mu F$; $\omega = 5000\ s^{-1}$



Lösung:

$$\underline{I}_2 = \frac{21Ve^{j60°}}{100\Omega e^{-j90°}} = 0{,}21Ae^{j150°}; \quad \underline{I}_3 = \frac{21Ve^{j60°}}{20\Omega + j25\Omega} = 0{,}656Ae^{j8{,}66°}; \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0{,}509Ae^{j23{,}59°}$$

Eingangsseitig:

$$\underline{UI}_1^* = \frac{21V \cdot 0{,}509A}{2} \cdot e^{j(60°-23{,}59°)} = 5{,}34VA \cdot e^{j(36{,}41°)} = 4{,}3W + j3{,}17\,\text{var}$$

An den Bauelementen:

$$R^2 I_3^{\,2} + j(\omega L I_3^{\,2} - \frac{1}{\omega C} I_2^{\,2})$$

$$= 20\Omega \cdot \frac{0{,}656^2 A^2}{2} + j\left(25\Omega \cdot \frac{0{,}656^2 A^2}{2} - 100\Omega \cdot \frac{0{,}21^2 A^2}{2}\right) = 4{,}3W + j3{,}17\,\text{var}$$

Die Ergebnisse stimmen überein.

06.04.01 a) Zeichnen Sie für die gegebene Schaltung das vollständige Zeigerdiagramm der Ströme und Spannungen.

Maßstabsvorschlag: 1 A ≙ 1 cm; 10 V ≙ 1 cm

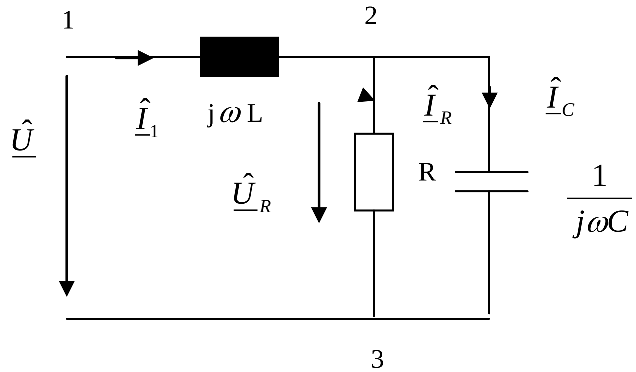
$\hat{U}_R$ = 50 V

$\varphi_{uR} = 0$

1/ωC = 10 Ω

R = 25 Ω

ωL = 8 Ω



b) Wie groß wären die Ströme und Spannungen, wenn die Eingangsspannung nicht den bestimmten Wert hat, sondern u = 200 V sin(ωt+15°) ist?

Lösung:

a) 50V ≙ 5 cm

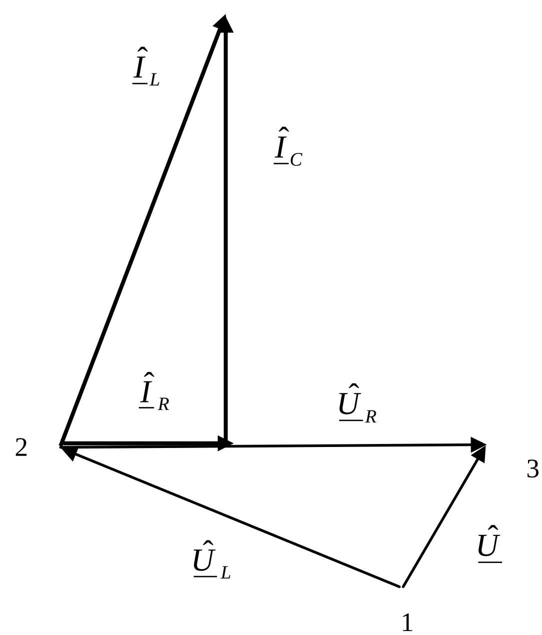
$$\underline{\hat{I}}_R = \frac{50V}{25\Omega} = 2A$$

$$\underline{\hat{I}}_C = \frac{50V}{-j10\Omega} = j5A = 5A \cdot e^{j90°}$$

$$\underline{\hat{I}}_L = \underline{\hat{I}}_R + \underline{\hat{I}}_C = 5{,}4A \cdot e^{j68{,}2°}$$

$$\underline{\hat{U}}_L = j8\Omega \cdot 5{,}4A \cdot e^{j68{,}2°} = 43{,}2V \cdot e^{j158{,}2°}$$

$$\underline{\hat{U}} = \underline{\hat{U}}_R + \underline{\hat{U}}_L = 18{,}8V \cdot e^{j58{,}3°}$$



b) Es ist der Korrekturfaktor zu berechnen, mit dem alle Ströme und Spannungen zu multiplizieren sind:

$$\underline{K} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{U}}_{Zeigerdiagram}} = \frac{200 \cdot e^{j15°}}{18{,}8 \cdot e^{j58{,}3}} = 10{,}6 \cdot e^{-j43{,}3°} \rightarrow$$

z.B.: $\underline{\hat{I}}_R = \underline{\hat{I}}_{R\,Zeigerdiagramm} \cdot \underline{K} = 21{,}2A \cdot e^{-j43{,}3°} \rightarrow i_R = 21{,}2 \cdot A \cdot \sin(\omega t - 43{,}3°)$

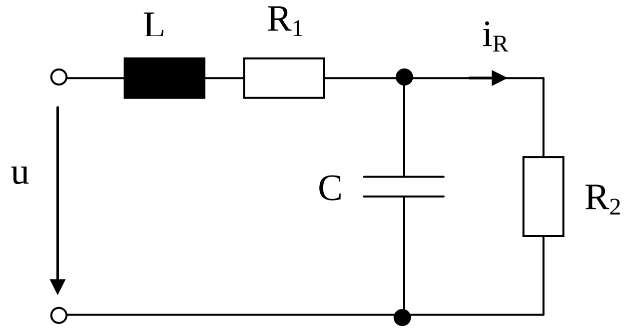
06.04.03 Zeichnen Sie alle Ströme und Spannungen als Zeigerdiagramm. Geben Sie das zeitliche Verhalten der Ströme und Spannungen an.

$i_{R2} = 1A \sin(\omega t + \pi/6)$

$f = 50$ Hz; $R_1 = 60\ \Omega$

$R_2 = 100\ \Omega$; $C = 30\ \mu F$

$L = 0{,}3$ H

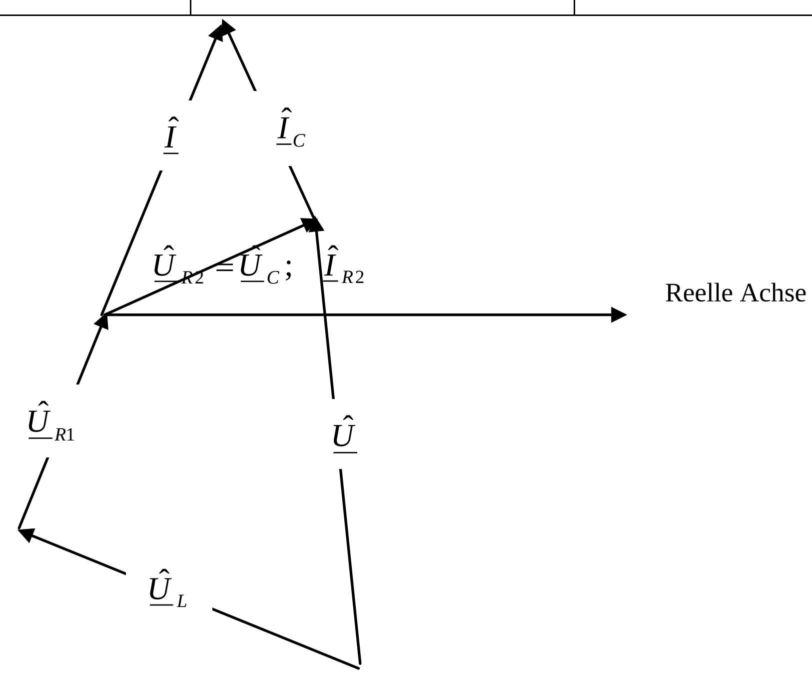


Maßstab: 1 A ≙ 5 cm; 100 V ≙ 5 cm

Lösung:

Berechnung der Größe	Länge des Zeigers/cm	Nullphasenwinkel/°
$\underline{\hat{I}}_{R2} = 1A \cdot e^{j30°}$	5	30
$\underline{\hat{U}}_{R2} = \underline{\hat{U}}_C = R_2 \cdot \underline{\hat{I}}_{R2} = 100V \cdot e^{j30°}$	5	30
$\underline{\hat{I}}_C = \dfrac{\underline{\hat{U}}_C}{1/j\omega C} = 0{,}94A \cdot e^{j120°} \quad \Rightarrow$	4,7	120
$\underline{\hat{I}}_C + \underline{\hat{I}}_R = \underline{\hat{I}} = 1{,}38A \cdot e^{j74°} \quad \Leftarrow$	6,9	74
$\underline{\hat{U}}_{R1} = R_1 \cdot \underline{\hat{I}} = 82{,}8V \cdot e^{j74°} \quad \Rightarrow$	4,14	74
$\underline{\hat{U}}_L = j\omega L \cdot \underline{\hat{I}} = 130V \cdot e^{j164°}$	6,5	164
$\underline{\hat{U}}_L + \underline{\hat{U}}_{R1} + \underline{\hat{U}}_{R2} = \underline{\hat{U}} = 170V \cdot e^{j95°} \quad \Leftarrow$	8,5	95

Skizze:



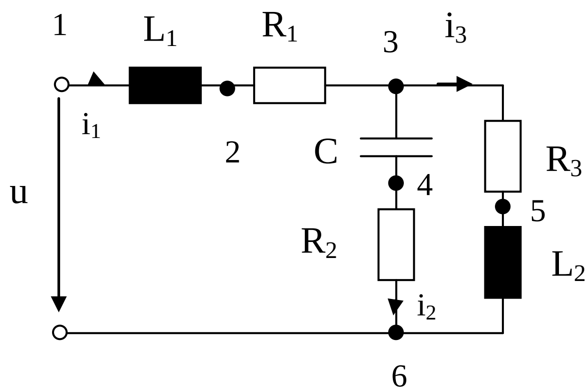
06.04.04 Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen mit Hilfe des topologischen Zeigerdiagramms.

$u = 170\text{V} \sin \omega t$

$R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 24\ \Omega$

$R_3 = 15\ \Omega$; $1/\omega C = 7\ \Omega$

$\omega L_2 = 20\ \Omega$; $\omega L_1 = 6\ \Omega$



Lösung: Annahme : $\hat{\underline{I}}'_3 = 1 A e^{j0°}$

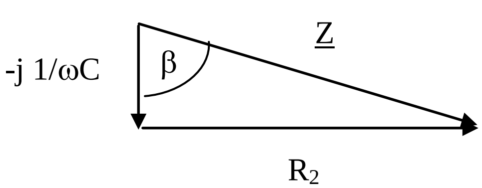
Es wird als Maßstab z. B. 1 A ≙ 2 cm und 1 V ≙ 0,25 cm gewählt

Berechnung der Größe	Länge des Zeigers/cm	Nullphasenwinkel/°
$\hat{\underline{I}}'_3 = 1A \cdot e^{j30°}$	2	0
$\hat{\underline{U}}'_{R3} = R_3 \cdot \hat{\underline{I}}'_3 = 15V \cdot e^{j0°}$	3,75	0
$\hat{\underline{U}}'_{L2} = j\omega L_2 \cdot \hat{\underline{I}}'_3 = 20V \cdot e^{j90°}$	5	90
$\hat{\underline{U}}'_{L2} + \hat{\underline{U}}'_{R3} = \hat{\underline{U}}'_2 = 25V \cdot e^{j53,1°} \quad \Leftarrow$	6,25	53,1

Aufteilung der Spannung u_2 auf C und R_2 durch eine Hilfskonstruktion zur Bestimmung des Winkels zwischen $\underline{Z}$ und R_2 , der der Phasenverschiebung zwischen den Spannungen u_2 und u_{R2} entspricht.

Maßstab z. B. 6 Ω ≙ 1 cm

Skizze: $R_2 = 24\ \Omega$ ≙ 4 cm; $1/\omega C = 7\ \Omega$ ≙ 1,17 cm



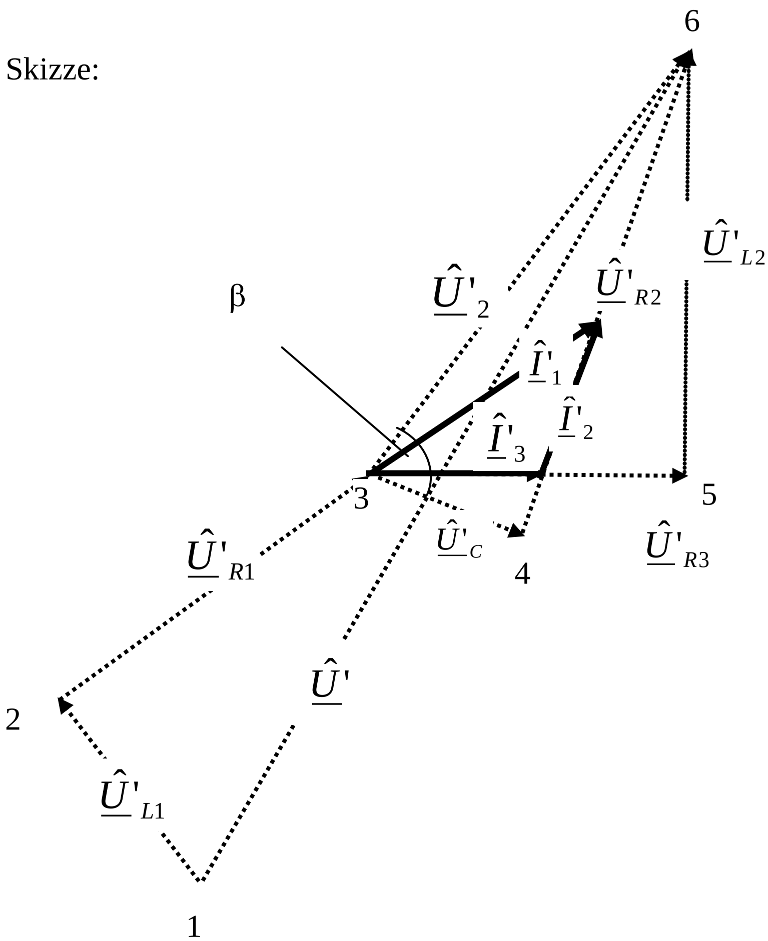
→ β = - 74°

Aufg. 06.04.04/Seite 2

Übername des Winkels β in das Zeigerbild und Ablesen der Spannungen über R_2 und C

Berechnung der Größe	Länge des Zeigers/cm	Nullphasenwinkel/°
$\underline{\hat{U}}'_C = 7V \cdot e^{-j20,6°}$ ←	1,75	-20,6
$\underline{\hat{U}}'_{R2} = 24V \cdot e^{j69,4°°}$ ←	4	69,4
$\underline{\hat{I}}'_2 = \underline{\hat{U}}'_{R2} / R_2 = 1A \cdot e^{j69,4°°}$	2	69,4
$\underline{\hat{I}}'_2 + \underline{\hat{I}}'_3 = \underline{\hat{I}}'_1 = 1,64A \cdot e^{j34,7°}$ ⇐	3,3	35
$\underline{\hat{U}}'_{R1} = \underline{\hat{I}}'_1 \cdot R_1 = 16,4V \cdot e^{j34,7°}$	4,1	34.2
$\underline{\hat{U}}'_{L1} = \underline{\hat{I}}'_1 \cdot j\omega L = 9,84V \cdot e^{j124,2}$	2,5	124,2
$\underline{\underline{\hat{U}'}} = \underline{\hat{U}}'_2 + \underline{\hat{U}}'_{R1} + \underline{\hat{U}}'_{L1} = 44V \cdot e^{j58,3°}$ ⇐	11	58,3

Skizze:



Korrekturfaktor: $\underline{K}$

$$\frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{U}}'} = \frac{170V \cdot e^{jo°}}{44V \cdot e^{j58,3°}} = 3,86 \cdot e^{-j58,3°}$$

Damit zurückrechnen

z. B.

$$\underline{\hat{I}}_1 = \underline{\hat{I}}'_1 \cdot \underline{K} = 6,3A \cdot e^{-j24,1°}$$

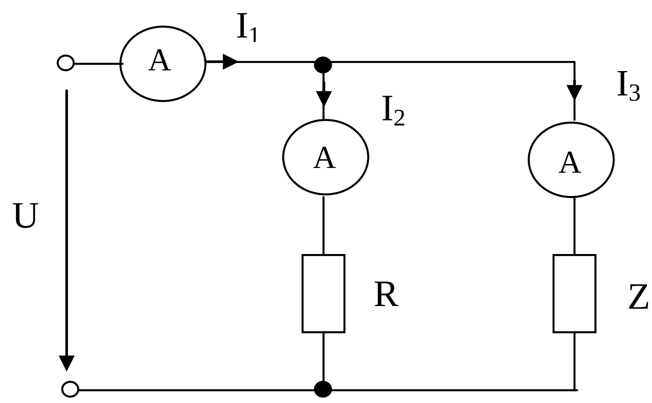
06.04.05 Mit Hilfe der Dreistrommessermethode ist eine Ersatzschaltung für den komplexen Widerstand Z (ohmsch - induktiv) zu ermitteln. Es werden folgende Werte gemessen:

$I_1 = 2{,}7$ A

$I_2 = 2{,}2$ A

$I_3 = 1{,}06$ A

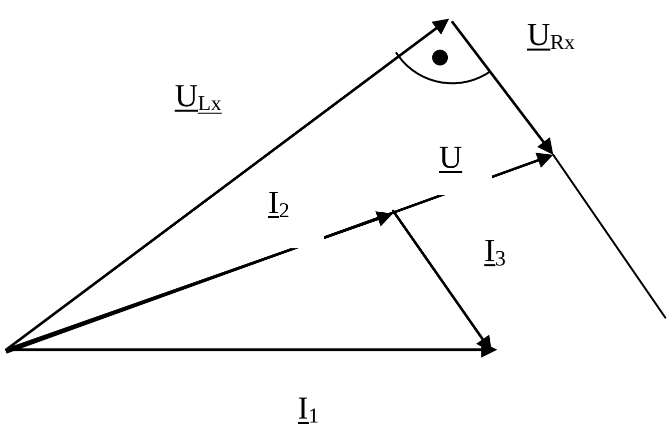
f = 50 Hz; R = 100 Ω



Lösung: Maßstab z. B. : 100 V ≙ 3 cm; 1 A ≙ 2 cm

Aus den gemessenen Effektivwerteen von I_1, I_2 und I_3 ist mit Hilfe eines Zirkels ein Dreieck zeichnen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\underline{Z}$ eine induktiv-ohmsche Last darstellt und somit $\underline{I}_3$ dem Strom $\underline{I}_2$ hinterhereilt. Die Spannung über dem Widerstand R ist phasengleich zum Strom $\underline{I}_2$ und entspricht der Spannung über $\underline{Z}$ und somit der Spannung über der gesuchten Ersatzschaltung. Möglich wäre als Ersatzschaltung die Reihen- oder die Parallelschaltung von R_x und L_x. Es wird die Reihenschaltung gewählt. Damit addieren sich die um 90° gegeneinander phasenverschobenen Spannungen über L_x und R_x zu $\underline{U}=R\underline{I}_2$ (220V ≙ 6,6cm) . Außerdem ist $\underline{U}_{Rx}$ phasengleich zu $\underline{I}_3$. Mit diesen Überlegungen ergibt sich das folgende Zeigerbild:

Skizze:



Ablesen:

1,8 cm ≙ $U_{Rx} = 60$ V;

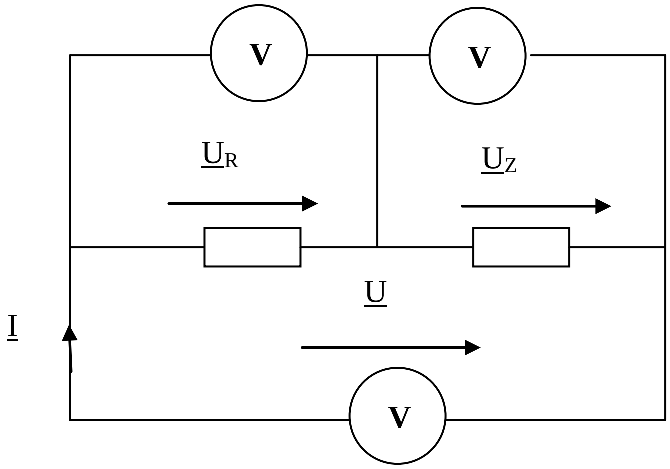
6,3 cm ≙ $U_{Lx} = 210$ V;

$$R = \frac{U_{Rx}}{I_3} = \frac{60V}{1{,}06A} = \underline{\underline{56{,}6\Omega}};$$

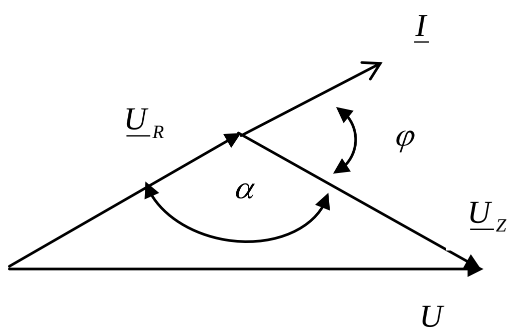
$$\omega L = \frac{U_{Lx}}{I_3} = \frac{210V}{1{,}06A} = 198.1\Omega$$

$$\xrightarrow{\omega = 314 s^{-1}} \underline{\underline{L = 0{,}63H}}$$

06.04.06 Bestimmen Sie mit Hilfe der Dreispannungsmessermethode Betrag und Winkel des komplexen Widerstandes $\underline{Z}$ (ohmsch-kapazitiv). Leiten Sie die Berechnungsformel aus dem Zeigerdiagramm ($\underline{I}$, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_Z$ und $\underline{U}$)ab.



Lösung:



$$\varphi = \varphi_{uz} - \varphi_i ; \quad \alpha = 180° - \varphi$$

$$U^2 = U_R^{\ 2} + U_Z^{\ 2} - 2 \cdot U_R \cdot U_Z \cdot \cos(180° - \varphi) = U_R^{\ 2} + U_Z^{\ 2} + 2 \cdot U_R \cdot U_Z \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{U^2 - U_R^{\ 2} - U_Z^{\ 2}}{2 \cdot U_R \cdot U_Z} ; \quad Z = \frac{U_Z}{I} = \frac{U_Z \cdot R}{U_R}$$

06.05.02 Berechnen Sie die Zweigströme i_1 und i_2, den Wirkungsgrad η,
den Leistungsfaktor cos φ_1 und die Eingangsimpedanz Z_1. Stellen Sie die Leistungsbilanz auf.

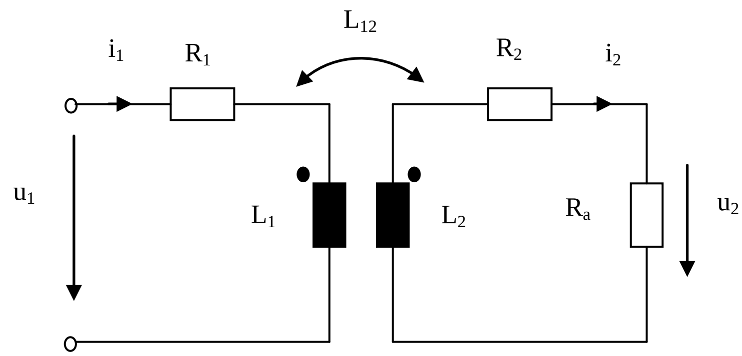
$U_1 = \hat{U}\ \sin \omega t$

U= 10 V; f = 50 Hz

L_1 = 40 mH; L_2 = 90 mH

k = 1; R_2 = 2 Ω

R_1 = 1 Ω; R_a = 10 Ω



Lösung:

1. Transformation ins Komplexe

$$\omega L_1 = 12{,}56\,\Omega; \quad \omega L_2 = 28{,}26\,\Omega; \quad L_{12} = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 60mH; \quad \omega\, L_{12} = 18{,}84\,\Omega$$

2. Maschengleichungen aufstellen

$$1.: \quad \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega L_1) - j\omega\, L_{12} \cdot \underline{I}_2$$

$$2.: \quad 0 = -j\omega\, L_{12} \cdot \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \cdot (R_2 + R_a + j\omega L_2)$$

– –

$$1.: \quad 10 = (1 + j12{,}56)\underline{I}_1 - j18{,}84 \cdot \underline{I}_2 \rightarrow \underline{I}_2 = \frac{10 - (1 + j12{,}56)\underline{I}_1}{-j18{,}84}$$

$$2.: \quad 0 = -j18{,}84 \cdot \underline{I}_1 + (12 + j28{,}26)$$

$$2. \rightarrow 0 = -j18{,}84\underline{I}_1 + (12 + j28{,}26) \cdot \frac{10 - (1 + j12{,}56)\underline{I}_1}{-j18{,}84}$$

$$15 - j6{,}36 = \underline{I}_1 \cdot (-j18{,}84 + 9{,}5 + j18{,}2) \rightarrow \underline{I}_1 = \frac{15 - j6{,}36}{9{,}5 - j0{,}64} = 1{,}62 - j0{,}56 = \underline{1{,}71 \cdot e^{-j19{,}1^\circ}}$$

$$\underline{I}_2 = j0{,}53 + (0{,}67 - j0{,}053)(1{,}62 - j0{,}56) = j0{,}53 + 1{,}06 - j0{,}46 = 1{,}06 + j0{,}07 = \underline{\underline{1{,}06A \cdot e^{j3{,}78^\circ}}}$$

3.Rücktransformation: $i_1 = 2{,}42A \cdot \sin(\omega t - 19{,}1^\circ); \quad i_2 = 1{,}5A \cdot \sin(\omega t + 3{,}8^\circ)$

Am Eingang:

Komplexe Scheinleistung: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{14{,}14V}{\sqrt{2}} e^{j0°} \cdot \frac{2{,}41A}{\sqrt{2}} e^{j19{,}2°} = \underline{\underline{17{,}04VA \cdot e^{j19{,}2°}}}$

Betrag der komplexen Scheinleistung = Scheinleistung: S = 17,04VA

Realteil der kompl. Scheinleistung = Wirkleistung : P = S $\cos\varphi$ = 16,09W

Imaginärteil der kompl. Scheinleistung = Blindleistung: Q = S sin φ = 5,6 var

An den Bauelementen:

Wirkleistung:

$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_2 + R_a) = \left(\frac{2{,}41^2}{2} \cdot 1 + \frac{1{,}48^2}{2} \cdot 12 \right) W = 16{,}04W$

Blindleistung: bestimmt durch Induktivitäten und Gegeninduktivität

$(\underline{S} = \underline{S}_{L1} + \underline{S}_{L2} = \underline{U}_{L1}\underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2}\underline{I}_{L2}^* = j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 \pm j\omega L_{12} (\underline{I}_2\underline{I}_1^* + \underline{I}_1\underline{I}_2^*)$

$= j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 \pm j\omega L_{12} (2 I_1 I_2 \cos \Delta\varphi_i)$, wobei das Vorzeichen gemäß der

Punktekennzeichnung zu ermitteln ist.)

Für die gegebene Schaltung erhält man damit:

$$Q = \omega L_1 \cdot I_1^2 + \omega L_2 \cdot I_2^2 - \omega L_{12} \cdot 2 \cdot I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

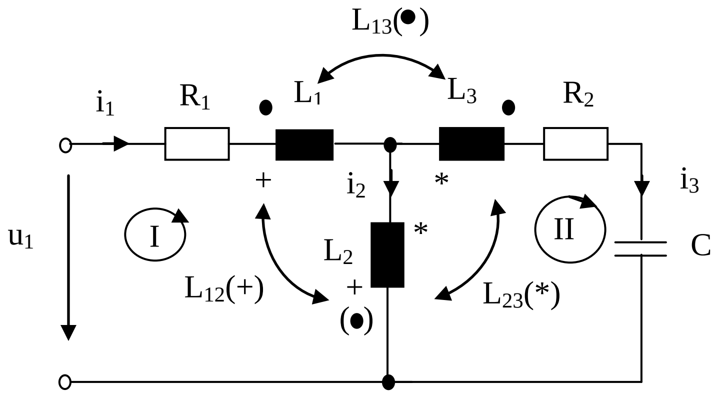
$$= 12{,}56 \cdot \frac{2{,}41^2}{2} + 28{,}26 \cdot \frac{1{,}48^2}{2} - 18{,}48 \cdot 2 \cdot \frac{2{,}41 \cdot 1{,}48}{2} \cos 22{,}5° = 36{,}47 + 30{,}95 - 60{,}9 = 6{,}5 \,\text{var}$$

Die Werte stimmen nahezu überein. Abweichungen folgen aus Rundungsfehlern und aus ungenauen Winkelberechnungen im Bereich kleiner Winkel (I_2)

Leistungsfaktor: $\cos\varphi$ = cos 19,2° = 0,9444

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 \cdot I_2}{P_1} = \frac{10{,}95}{16{,}09} = 0{,}68$

06.05.03 Stellen Sie für die gegebene Schaltung die Maschengleichungen auf.



Lösung:

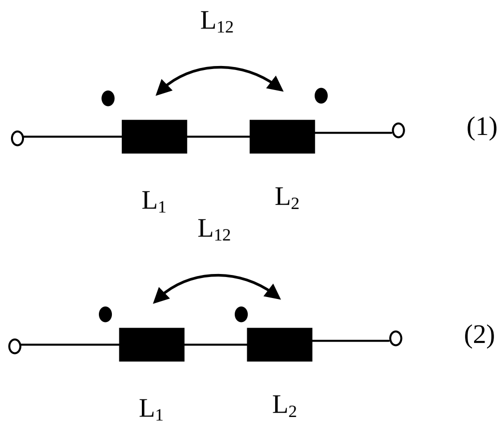
Zu beachten ist die Verkopplung von jeweils zwei (!) Wicklungen. Daher vermutlich die unterschiedliche Kennzeichnung der Spulen"anfänge", die jedoch eigentlich nicht notwendig wäre, weil sich das Ergebnis nicht ändern würde, wenn bei L_{23} die Punkte genutzt würden, dann wären es eben die beiden Spulen"enden" – Einfluss auf die ursächliche Verkopplung der Spulen hat das nicht!

I: $\underline{U}_1 = \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2\, j\omega L_2 - \underline{I}_3\, j\omega L_{13} - \underline{I}_2\, j\omega L_{12} - \underline{I}_1\, j\omega L_{21} + \underline{I}_3\, j\omega L_{23}$

II: $0 = \underline{I}_3(R_2 + j\omega L_3 + 1/j\omega C) - \underline{I}_2\, j\omega L_2 - \underline{I}_1\, j\omega L_{13} + \underline{I}_2\, j\omega L_{32} + \underline{I}_1\, j\omega L_{12}$

$- \underline{I}_3\, j\omega L_{23}$

06.05.05 Mit Hilfe einer Brücke werden die Ersatzinduktivitäten L_{ers1} und L_{ers2} der Anordnungen (1) bzw. (2) gemessen. Bestimmen Sie daraus die gegenseitige Induktivität L_{12}.



Lösung:

$$L_{ers\,1} = L_1 + L_2 + 2\,L_{12}$$

$$L_{ers\,2} = L_1 + L_2 - 2\,L_{12}$$

$$L_{ers\,1} - L_{ers\,2} = 4\,L_{12}$$

$$L_{12} = \frac{L_{ers\,1} - L_{ers\,2}}{4}$$

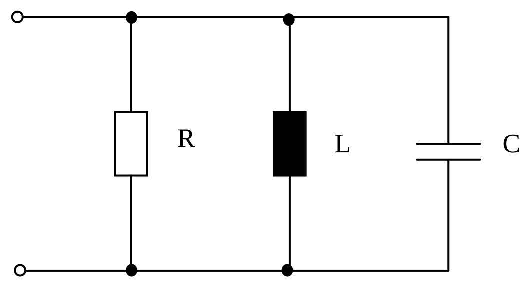
06.06.02 Zeichnen Sie die Ortskurve des Leitwertes in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω für die folgende Schaltung (Maßstabsvorschlag: 0,1 S ≙ 1 cm).

$R = 8\ \Omega$; $L = 2$ mH

$C = 100\mu F$; $\omega_1 = 1000\ s^{-1}$

$\omega = p\ \omega_1$, mit

$p = 1, 2, 4$



Lösung:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j(p\omega_1 C - \frac{1}{p\omega_1 L})$$

$$\omega_1 C = 1000 s^{-1} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V} = 0{,}1S;$$

$$\frac{1}{\omega_1 L} = \frac{1}{1000 s^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} H} = 0{,}5S$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j(p0{,}1S - \frac{1}{p}0{,}5S)$$

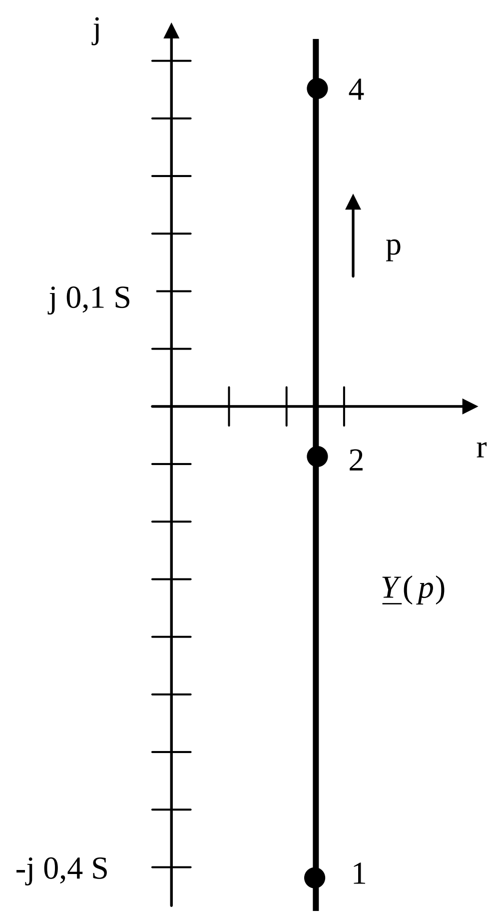
Der Realteil bleibt konstant 1/R = 125 mS.

P = 1 $\rightarrow$ Imaginärteil = - j 0,4 S

P = 2 $\rightarrow$ Imaginärteil = - j 0,05 S

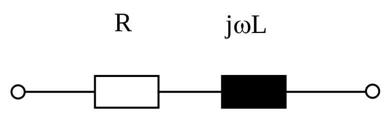
P = 4 $\rightarrow$ Imaginärteil = + j 0,275

Maßstab: 100 mS ≙ 1 cm

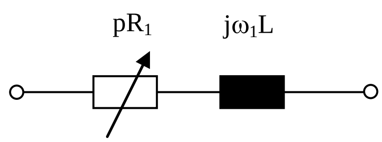


06.06.03 Für folgende Schaltungen sind quantitativ die geforderten Ortskurven zu zeichnen. Wählen Sie für alle Aufgabenstellungengeeignete Maßstäbe für die Widerstands- bzw. Leitwertsebene.

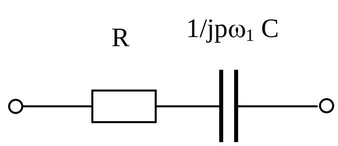
1a) Ortskurve für $\underline{Z}(p)$ und $\underline{Y}(p)$ mit R = 500 Ω, L = 2 H, $\omega = p\,\omega_1$, $\omega_1 = 100\ s^{-1}$
Zeichnen Sie die Parameterwerte in die Ortskurven für den Bereich $50\ s^{-1} \leq \omega \leq 500\ s^{-1}$ ein.



1b) Ortskurve für $\underline{Z}(p)$ und $\underline{Y}(p)$ für $\omega = 250\ s^{-1}$, L = 2 H und $R = pR_0$; $R_0 = 400\ \Omega$
Zeichnen Sie die Parameterwerte in die Ortskurven für den Bereich $0 \leq R \leq 2\ k\Omega$ ein.

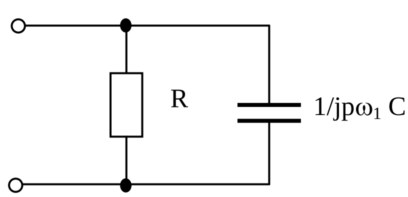


1c) Ortskurve für $\underline{Z}(p)$ und $\underline{Y}(p)$ für R = 800 Ω, $1/\omega_1 C = 1600\ \Omega$; $\omega = p\,\omega_1$
Zeichnen Sie die Parameterwerte in die Ortskurven für den Bereich $0 \leq p \leq 8$ ein.



2) Ortskurve für $\underline{Y}(p)$ und $\underline{Z}(p)$ für R = 1000 Ω, C = 0,5 µF; $\omega = p\,\omega_1$; $\omega_1 = 500\ s^{-1}$

Zeichnen Sie die Parameterwerte in die Ortskurven für den Bereich $500\ s^{-1} \leq \omega \leq 2500\ s^{-1}$ ein.



Lösung: Seite 2 und 3

06.06.03/Seite 2

Lösung:

1a) $\underline{Z} = R + j\omega L = 500\,\Omega + jp \cdot 200\,\Omega$

maximaler Wert für ωL ist $1000\,\Omega$

Maßstab z. B.: $100\Omega \mathrel{\hat{=}} 0{,}5cm$

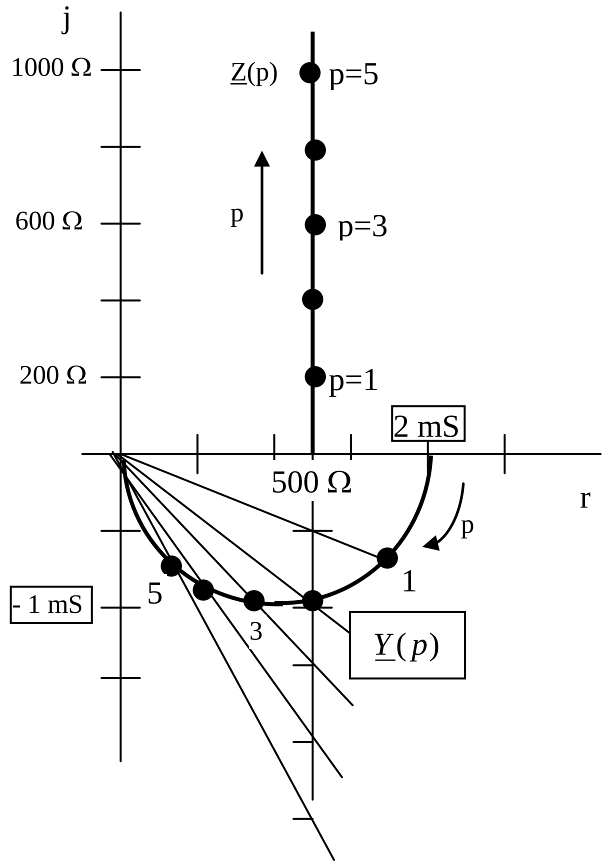
$\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

Inversion einer Geraden in allgemeiner Lage liefert einen Kreis, der den Nullpunkt enthält.

Der vorher kürzeste Zeiger wird der längste, also der Durchmesser:

$\dfrac{1}{500\Omega} = 2mS$

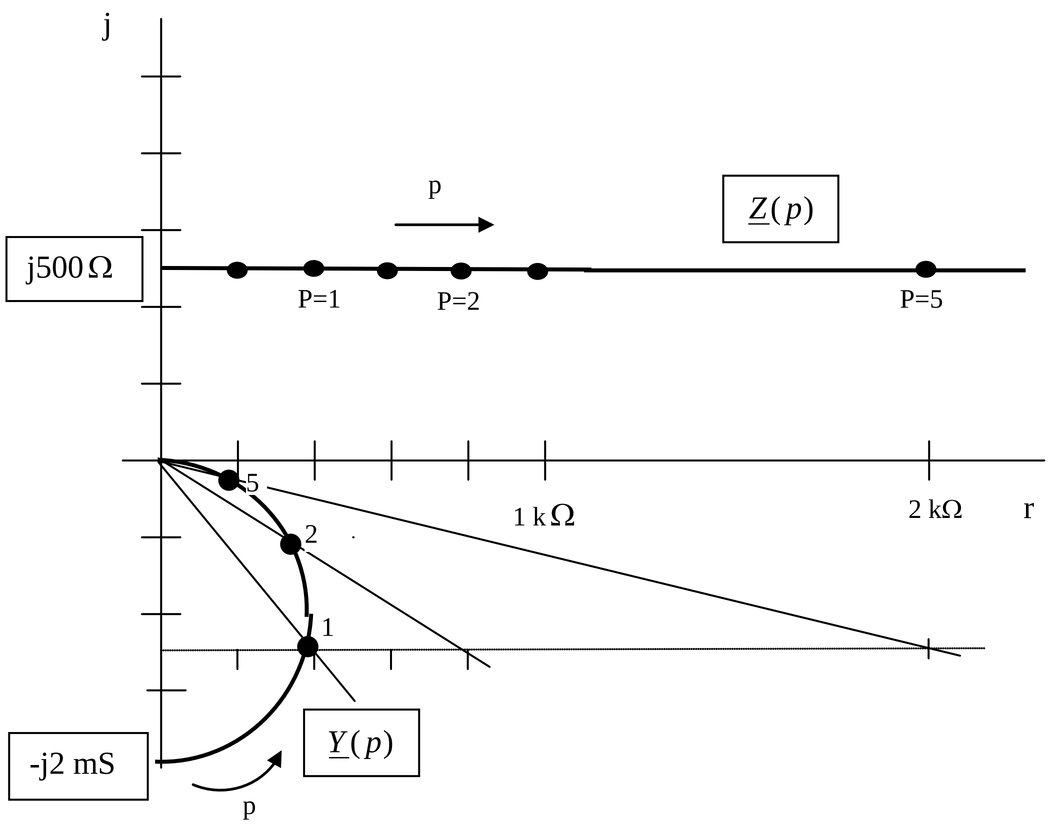
Maßstab z. B.: $2mS \mathrel{\hat{=}} 4cm$



1b)

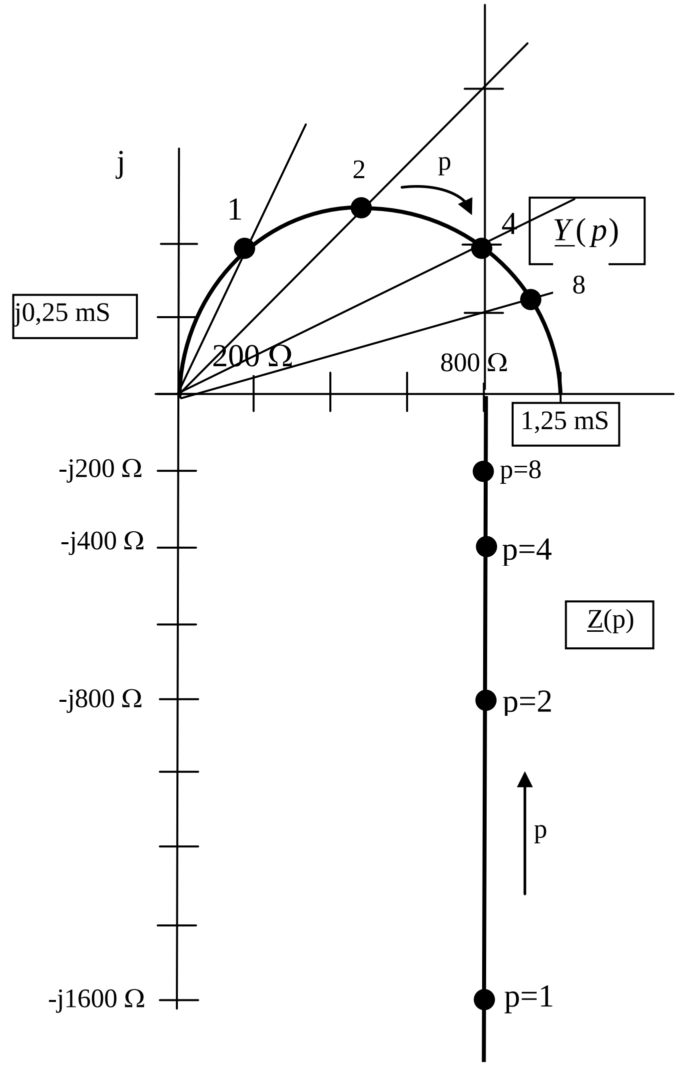
$\underline{Z} = p \cdot R_0 + j\,500\Omega$

Maßstab wie bei 1a)



1c) $\underline{Z} = R - j\dfrac{1}{p\omega_1 C}$

Maßstab z. B.: $0{,}25\,mS \,\hat{=}\, 1\,cm$; $200\,\Omega \,\hat{=}\, 1\,cm$



2) R = 1000 Ω; C = 0,5 μF;

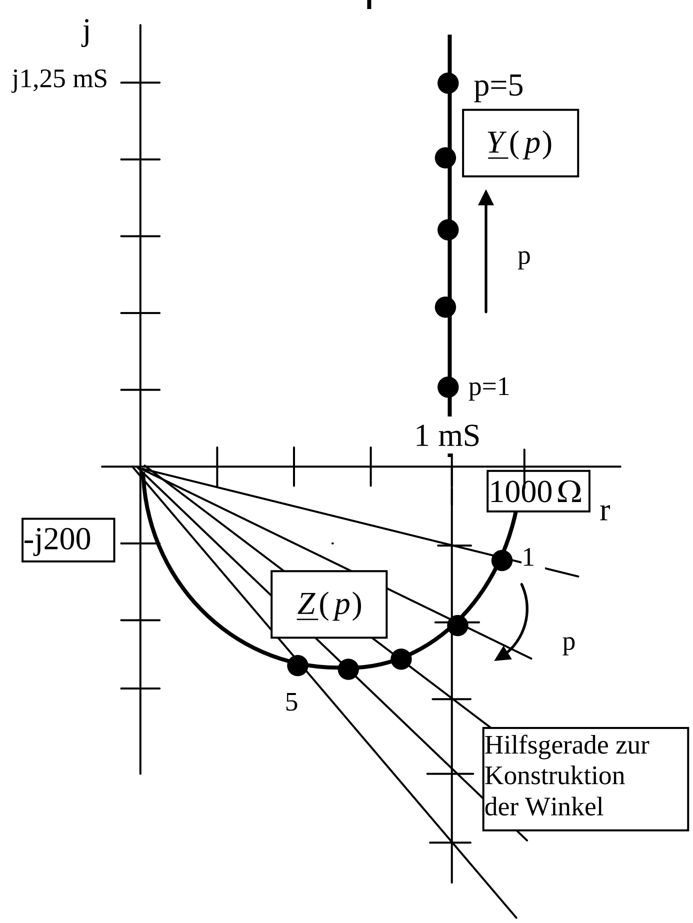
$500\ s^{-1} \leq \omega \leq 2500\ s^{-1}$
(p = 1..5)

Maßstab z. B.: $0{,}25\,mS \,\hat{=}\, 1\,cm$; $200\,\Omega \,\hat{=}\, 1\,cm$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jp\omega_1 C$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1000\Omega} = 0{,}001S$$

$$5p\omega_1 C = 2500s^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{As}{V} = 1{,}25mS$$



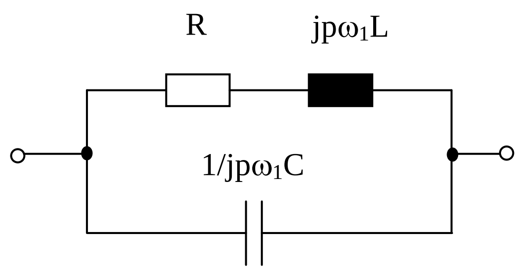
06.06.04 Ermitteln Sie die Ortskurve $\underline{Y}(p)$ der folgenden Schaltung durch Addition der Ortskurven der Teilleitwerte.

R = 8Ω; L = 2 mH

C = 10 μF; $\omega = p\,\omega_1$

$\omega_1 = 1000\ s^{-1}$

p = 0; 1; 2 ... 10



Maßstabsvorschlag: 2 Ω ≙ 1 cm; 0,1 S ≙ 4 cm

Ausführliche Lösung:

$$\underline{Y}(p) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

Zunächst wird $\underline{Z}_1 = R + jp\omega_1 L$ als Ortskurve dargestellt.

$\omega_1 L = 1000\ s^{-1}\ 2\ mH = 2\ \Omega$; mit unserem Maßstab heißt das $\omega_1 L \hat{=} 1$ cm;

der Widerstand R = 8 Ω ≙ 4 cm;

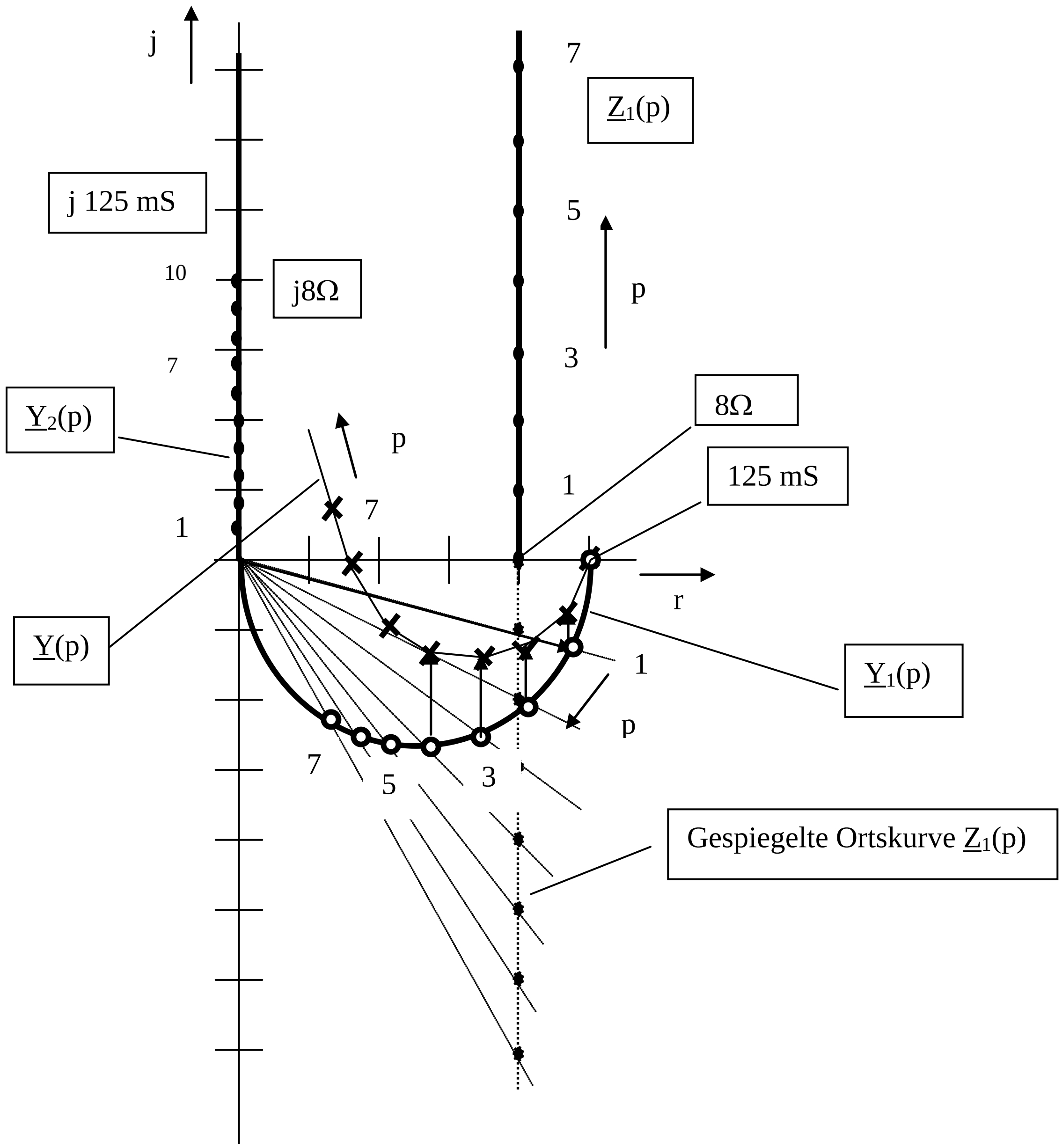
mit steigendem p wird der Imaginärteil größer, der Realteil verändert sich nicht, also bekommen wir als Ortskurve eine bei p = 0 auf der reellen Achse beginnende Halbgerade parallel zur Ordinate.

Die Inversion $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$ führt dazu, dass der kürzeste Zeiger nach der Inversion zum längsten Zeiger wird und der vorher längste wird zum kürzesten. Alle Winkel bleiben erhalten, jedoch mit einem negativen Vorzeichen. Das bedeutet: Da sich alle Zeiger von $\underline{Z}_1$ im ersten Quadranten befinden, muss die Ortskurve von $\underline{Y}_1(p)$ vollständig im 4. Quadranten liegen.
Die Inversion einer Geraden in allgemeiner Lage ist ein Kreis durch den Ursprung.
So muss sich als invertierte Kurve ein Halbkreis im vierten Quadranten ergeben, dessen Durchmesser (vormals kürzester Zeiger) auf der reellen Achse liegt und 1/R beträgt. Die Länge ergibt sich aus dem neuen (Siemens-) Maßstab zu 1/8Ω = 125 mS ≙ 5 cm.

$\underline{Y}_2 = jp\omega_1 C$; $\omega_1 C = 1000\ s^{-1}\ 10\ \mu F = 10\ mS \hat{=} 0{,}4$ cm

Es ergibt sich als Ortskurve für $\underline{Y}_2(p)$ eine Halbgerade auf der imaginären Achse, die im Ursprung mit p = 0 beginnt.

$\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \underline{Y}$ Die beiden Ortskurven werden addiert, indem die Zeiger für die einzelnen Parameterwerte addiert werden!



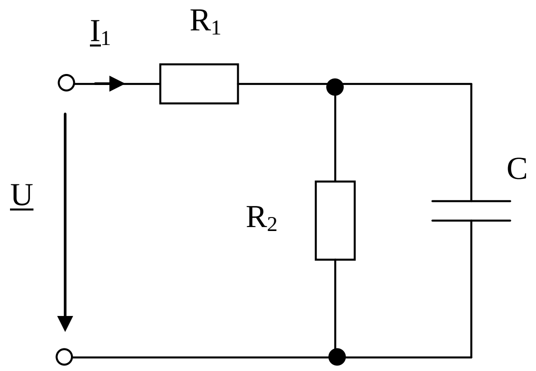
06.06.05 Mit Hilfe der Ortskurvendarstellung ist das Verhalten des Stromes $\underline{I}_1$ in Abhängigkeit von der Frequenz anzugeben.

$R_1 = 100\ \Omega$

$R_2 = 500\ \Omega$

$C = 10\ \mu F$

$U = 10\ V;\ \varphi = 0°$



Ausführliche Lösung:

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \cdot \underline{Y} = \underline{U} \cdot \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \frac{1}{R_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_2} + j\omega C}}$$

Aus dieser Darstellung ist ein Lösungsweg abzulesen:

1. Den Leitwert der Parallelschaltung als Ortskurve darstellen: da sich nur der Imaginärteil verändert, ergibt sich eine Parallele zur imaginären Achse.
   Maßstab (Leitwert) wählen $\leftarrow \frac{1}{R_2} = \frac{1}{500\Omega} = 2mS; z.B.\ 1mS \mathrel{\hat{=}} 1cm$

2. Die Ortskurve des Leitwertes invertieren : eine Gearade in allgemeiner Lage invertiert ergibt einen Kreis durch den Ursprung. Der Durchmesser des Kreises ist damit der längste Zeiger der neuen Ortskurve und muss vorher der kürzeste (R_2) gewesen sein. Neuer Maßstab (Widerstand) $\leftarrow R_2 = 500\Omega; z.B.\ 100\Omega \mathrel{\hat{=}} 1cm$

3. Zu der entstandenen Widerstandsortskurve ist der Widerstand R_1 zu addieren. Das liefert eine Verschiebung der Ortskurve in Richtung reelle Achse. Maßstab von 2. berücksichtigen

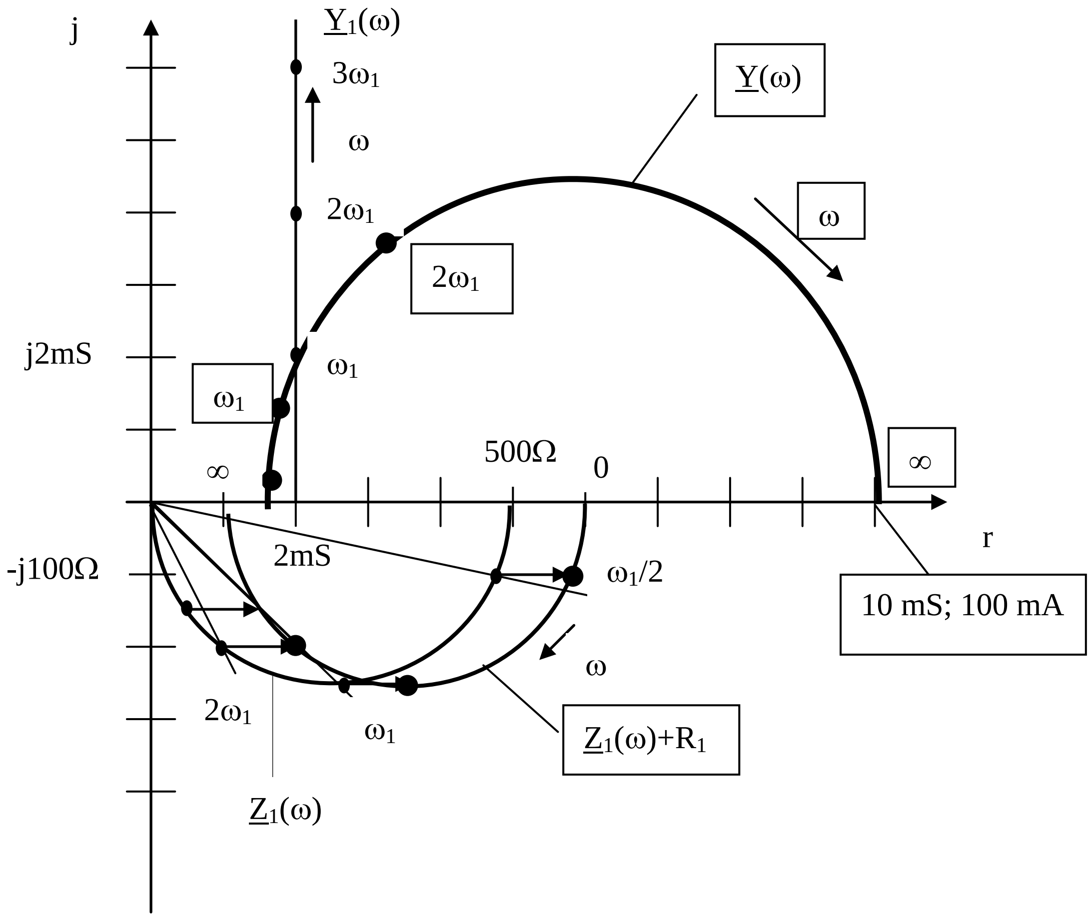
4. Die nun entstandene Ortskurve ist zu invertieren. Ein Kreis in allgemeiner Lage führt zu einem Kreis in allgemeiner Lage. Neuer Maßstab oder den von 1. berücksichtigen (Leitwert); kürzester Zeiger (R_1) wird längster
   $\leftarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{100\Omega} = 10mS \mathrel{\hat{=}} 10cm$; längster (600Ω) wird kürzester (1,7mS)

5. Neuen Maßstab (Strom) einführen: $\underline{I} = \underline{U}\ \underline{Y} \leftarrow 10mS \cdot 10V = 100mA \mathrel{\hat{=}} 10cm!$

Wenn keine Parameterwerte vorgegeben sind, kann zur vernünftigen Wahl der Parameter ausgerechnet werden, der zu einem gleichen Betrag bei Real – und Imaginärteil führt: $\omega_1 C = \frac{1}{R_2} \rightarrow \omega_1 = \frac{1}{CR_2} = \frac{1}{10\,\mu F \cdot 500\Omega} = 200\,s^{-1}$

Die Parameterwerte werden auf die jeweiligen invertierten Kurven durch Einzeichnen des zugehörigen Winkels mit negativem Vorzeichen übertragen.

Skizze:

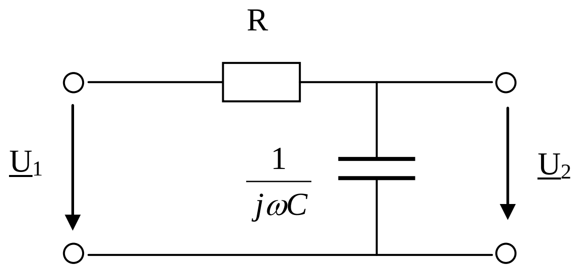


06.06.06 Für die gegebene Schaltung ist die Ortskurve des Übertragungsverhältnisses $\underline{H} = \underline{U}_2/\underline{U}_1$ in Abhängigkeit von der Frequenz quantitativ darzustellen.

$R = 100\ \Omega$

$C = 5\ \mu F$

$0\ s^{-1} \leq \omega \leq 4000\ s^{-1}$



Lösung:

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = 2000\ s^{-1}$$

Maßstab: $1 \hat{=} 4cm$

Zuerst Ortskurve von $\frac{1}{\underline{H}} = 1 + j\omega RC$

Inversion einer Geraden in allgemeiner Lage liefert einen Kreis, der den Nullpunkt enthält.

Der vorher kürzeste Zeiger wird der längste, also der Durchmesser.